

■ Weitere Bem. zu isotropen, linear elastischen Material:

● Elastische Konstanten im isotropen Fall:

Aus (2.8) folgt

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

mit den Lamé'schen Konstanten $\lambda, \mu > 0$.

Neben den Lamé'schen Konstanten (F) werden in der Ingenieurpraxis auch die folgenden Konstanten verwendet:

$$\left[\frac{N}{m^2} \right] \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} = 2(1+\nu)\mu = \frac{9K\mu}{3K+\mu} \quad \text{Youngscher Elastizitätsmodul}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{1}{2} \frac{3K-2\mu}{3K+\mu} \quad \text{Poisson'sche Querkontraktionszahl } \nu \in (0, 1/2)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{Kompressionsmodul (bulk modulus)}$$

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Gleitmodul (shear modulus)}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} = K - \frac{2}{3}G.$$

Daraus ergeben sich z. B. für K und G die Beziehungen

$$3p = \sigma_{ii} = [\lambda \delta_{ii} \delta_{kk} \varepsilon_{kk} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{il} \varepsilon_{kk}] = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk}$$

$$p = \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk} \quad \Rightarrow \quad p = K \varepsilon_{kk}$$

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - p \delta_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \\ &= 2\mu \varepsilon_{ij} - 2\mu \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} = 2\mu (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon} \delta_{ij}) = 2\mu \tilde{\varepsilon}_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{ij} = 2\mu \tilde{\varepsilon}_{ij} = 2G \tilde{\varepsilon}_{ij}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}, i \neq j}$$

E und ν (damit $\lambda, \mu = G, K$) können direkt aus dem Zugversuch (Pkt. 2.1) bestimmt werden!