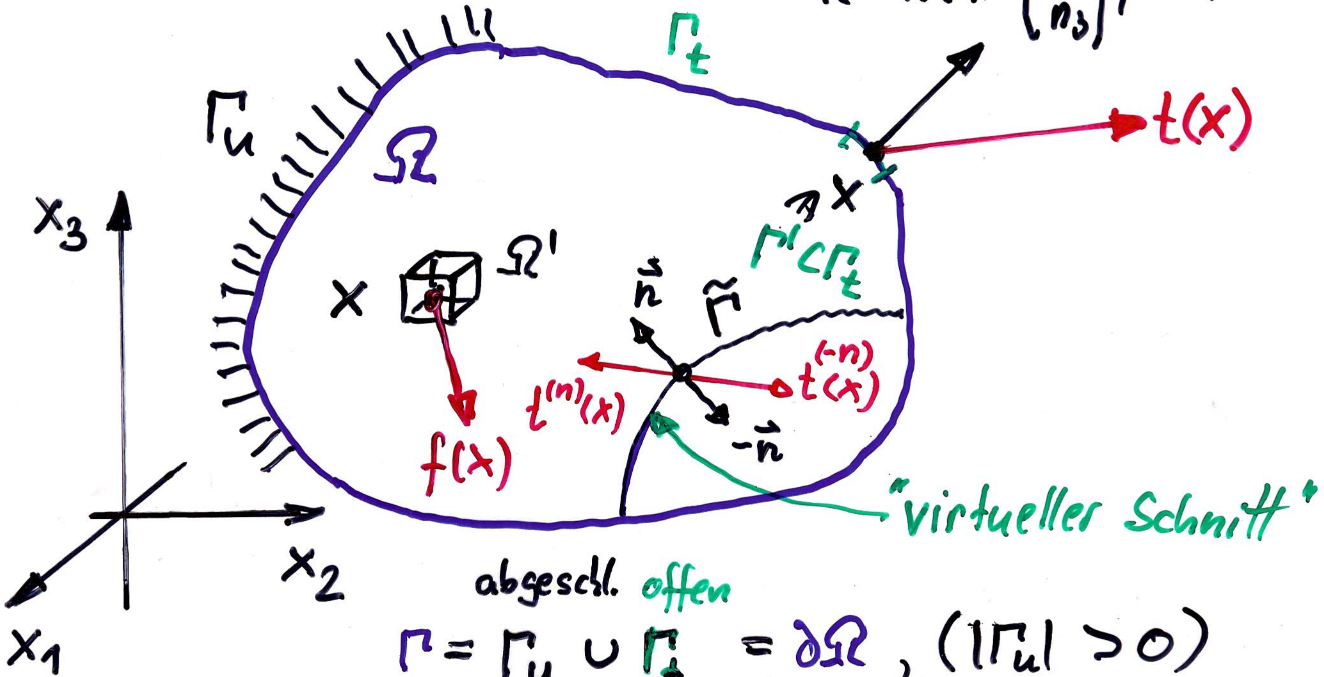
2.2. Grundgleichungen der Linearen Elastizitätstheorie

2.2.1. Spannungszustand (KINETIK)

- Btr. belasteten Körper, der das * Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit dem hinreichend glatten Rand $\Gamma = \partial\Omega$ einnimmt, im statischen Gleichgewicht
  (in der Linearen Theorie identifiziert man den undeformierten mit dem deformierten Körper als Referent Körper):

$$\vec{n} = \vec{n}(x) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{n}| = 1$$



abgeschl. offen

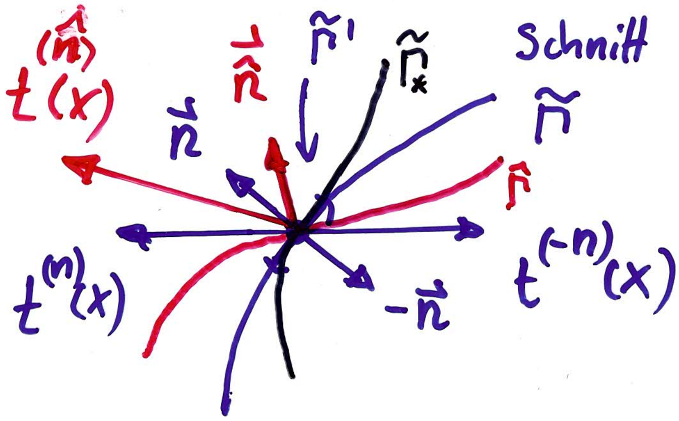
$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t = \partial\Omega, \quad (|\Gamma_u| > 0)$$

$$f(x) = \lim_{\substack{|\Omega'| \to 0 \\ x \in \Omega' \subset \Omega}} \frac{f_{\Omega'}}{|\Omega'|} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \text{VolumenKraftdichte } x \in \Omega \text{ (volume forces)}$$

$$t(x) = \lim_{\substack{|\Gamma'| \to 0 \\ x \in \Gamma' \subset \Gamma_t}} \frac{t_{\Gamma'}}{|\Gamma'|} = \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} = \text{OberflächenKraftdichte } x \in \Gamma \text{ (surface tractions)}$$

■ Spannungszustand in einem Pkt. $x \in \overline{\Omega}$ und der Spannungstensor:

• **Totale Spannung $t^{(n)}(x)$ im Pkt. x mit der Normale $\vec{n}$:**



$$t^{(n)}(x) = \lim_{\substack{|\tilde{\Gamma}'| \to 0 \\ x \in \tilde{\Gamma}' \subset \tilde{\Gamma}}} \frac{t^{(n)}_{\tilde{\Gamma}'}}{|\tilde{\Gamma}'|} = \lim_{\substack{|\tilde{\Gamma}'_x| \to 0 \\ x \in \tilde{\Gamma}'_x \subset \tilde{\Gamma}_x}} \frac{t^{(n)}_{\Gamma'_x}}{|\tilde{\Gamma}'_x|}$$

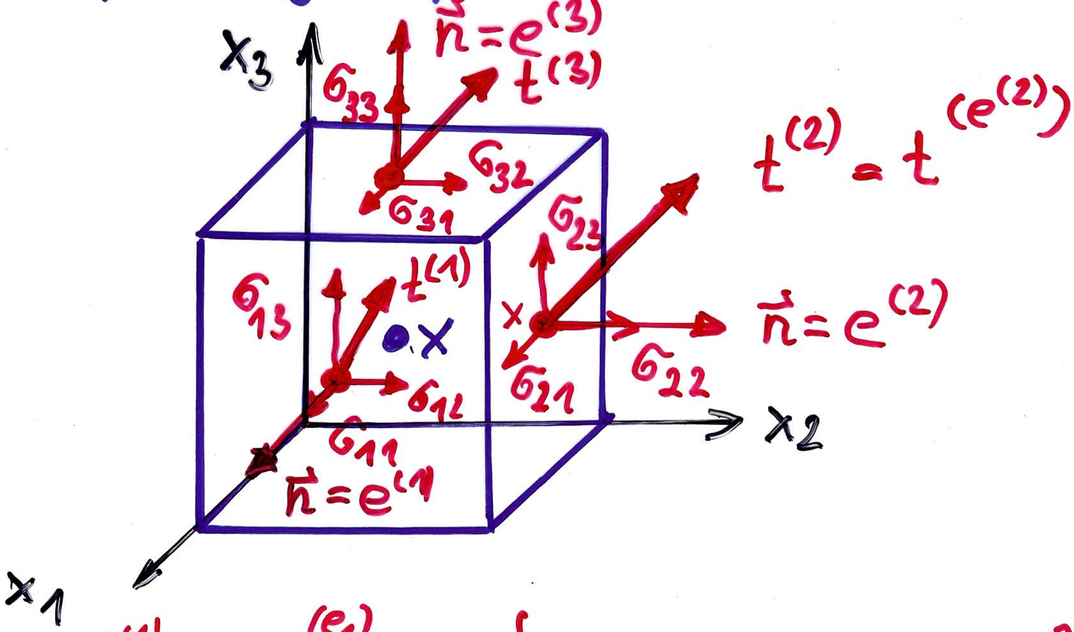
actio = reactio
im Gleichgewicht

unabhängig von $\tilde{\Gamma}$, aber abhängig von der Normale $\vec{n}$ im Pkt. x

• **Spannungszustand im Pkt $x \in \overline{\Omega}$:**

$$(10) \quad \left\{ t^{(n)}(x) = \left(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)}\right)^T : n = \mathcal{N} := \underbrace{\left\{ \vec{n} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{n}| = 1 \right\}}_{\text{unit ball } B(0,1)} \right\}$$

• **Totale Spannungen für $n = \vec{n} = e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$:**

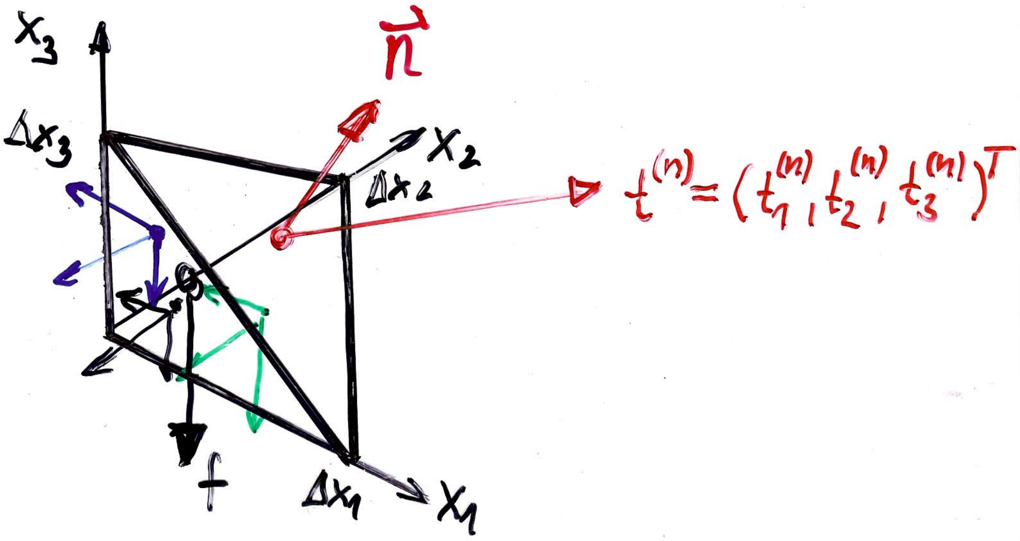


$$t^{(1)}(x) = t^{(e_1)}(x) = \left[\sigma_{11}(x), \sigma_{12}(x), \sigma_{13}(x)\right]^T$$
$$t^{(2)}(x) = t^{(e_2)}(x) = \left[\sigma_{21}(x), \sigma_{22}(x), \sigma_{23}(x)\right]^T$$
$$t^{(3)}(x) = t^{(e_3)}(x) = \left[\sigma_{31}(x), \sigma_{32}(x), \sigma_{33}(x)\right]^T$$

Ü 2.3 Zeigen Sie die Transformationsformel

$$(11)\quad t_i^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji}(x)\, n_j \quad \forall \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{n}| = 1,$$

indem Sie das Kräftegleichgewicht an einem Tetraeder betrachten!



Ü 2.4 Schneiden Sie virtuell einen "kleinen" Würfel

$$\text{"}\Delta x\text{"} := \left[x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}\right] \times \left[x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}\right] \times \left[x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}\right]$$

aus einem im Gleichgewicht befindlichen Körper heraus und schreiben Sie das Kräftegleichgewicht (z.B. in x_1-Richtung) auf!