Variationsformulierung (VF): ↓ VO "(N) PDgl"

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die ARWA (28) in eine Variationsformulierung zu überführen, z.B. können wir (28) mit einer x- und t-abhängigen Testfkt. $w(x,t)$ multiplizieren und über Q_T integrieren:

a)

$$\int_\Omega c\varrho \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, w(x,t)\, dt\, dx - \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div}(\Lambda \nabla u)\, w\, dx\, dt \; + \int_{Q_T} c\varrho\, \vec{v}\cdot\nabla u\, w\, dx\, dt = \int_{Q_T} f w\, dx\, dt$$

immer

b)

In der Praxis verwendet man aber meist die sogenannte Linienvariationsformulierung (LVF):

$$\int_\Omega (35)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in V_0 \quad \overset{\bullet}{\forall} (\text{für fast alle})\; t \in (0,T)$$

Mit der Standardprozedure (① – ⑤ siehe Folie 5) erhalten wir dann die LVF (o.B.d.Allg.: $g = 0$)

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Ges. } u(\cdot,\cdot) \text{ mit } \overset{\bullet}{\forall} t \in (0,T):\ u \in V_0,\ \dot{u} \in L_2(\Omega):\\ &\int_\Omega c\varrho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, w(x)\, dx + \int_\Omega \Lambda \cdot \nabla u \cdot \nabla w\, dx + \int_\Omega c\varrho\, \vec{v}\cdot\nabla u \cdot w\, dx =\\ &\qquad = \int_\Omega f(x,t)\, w(x)\, dx \quad \forall v \in V_0 = \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \quad \overset{\bullet}{\forall} t \in (0,T)\\ &+ \text{AB}:\ u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \text{ in } L_2(\Omega) \end{aligned}}$$