P XI Mittwoch, d. 15.1. 2003 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{00}}$ Uhr; Raum : T 711)

3.1.2 Konsistenz- und Stabilitätsuntersuchungen

Betrachten das instationäre 1D-Wärmeleitproblem

$$\begin{array}{rrcll} \text{Ges. } u(x,t): & \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & f(x,t)\,, & x \in (0,1)\,,\, t \in \mathbf{T} = (0,T) \\ + \text{ RB}: & u(0,t) & = & g_0(t)\,, & t \in \mathbf{T} \\ & u(1,t) & = & g_1(t)\,, & t \in \mathbf{T} \\ + \text{ AB}: & u(x,0) & = & u_0(x)\,, & x \in [0,1] \end{array} \tag{17}$$

und approximieren es durch das Leapfrog-Schema (RICHARDSON-Schema) :

$$\begin{array}{l} \text{Ges. } v : \overline{\omega}_{h\tau} \longmapsto \mathbf{R}^1 : \\ \qquad v_{\overset{\circ}{t}} - v_{\overline{x}x} = \varphi(x,t)\,, \qquad (x,t) \in \overline{\omega}_{h\tau} \qquad \text{bzw.} \\ \qquad \dfrac{v_i^{j+1} - v_i^{j-1}}{2\tau} - \dfrac{v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j}{h^2} = \varphi_i^j\,, \qquad {\scriptstyle i=\overline{1,n-1}\,,\, j=\overline{1,m-1}} \\ + \text{ RB}: \; v_0^j = g_0(t_j)\,, \qquad v_n^j = g_1(t_j) \qquad {\scriptstyle j=\overline{1,m}} \\ + \text{ AB}: \; v_i^0 = u_0(x_i) \qquad {\scriptstyle i=\overline{0,n}} \\ + \text{ geeignetes (?) Einschrittverfahren zur Bestimmung von } v_i^1,\; {\scriptstyle i=\overline{1,n}} \;\; !? \\ \text{mit } \varphi_i^j = f(x_i,t_j)\,. \end{array} \tag{18}$$

Ü23 Man untersuche die lokale Approximationsordnung (= Konsistenzordnung) des Leapfrog-Schemas (18) für (17) und gebe die führenden Terme des lokalen Approximationsfehlers (= lokaler Abschneidefehler = local truncation error) $\psi = .\overset{?}{.}.\, h^p + .\overset{?}{.}.\, \tau^q + 0(h^p + \tau^q) = O(h^p + \tau^q)$ an !
Welches Einschrittverfahren schlagen Sie zur Bestimmung von v_i^1 vor ?

Ü6 Untersuchen Sie die Stabilität (im v. NEUMANNschen Sinne) des Leapfrog-Schemas mit homogener rechter Seite !

○ Hinweis :

- Studieren Sie im Skriptum Numerik III den Abschnitt (Bemerkung 2.7) zur v. NEUMANNschen Stabilitätsanalyse !
- Ansatz : $v_s^j = (e^{\alpha\tau})^j \, e^{i\lambda sh}$, $(i^2 = -1)$
  (Fortpflanzung der harmonischen Anfangsstörung)
- Stabilitätskriterium : $|e^{\alpha\tau}| \le 1$

– <u>Allgemeines Stabilitätskriterium :</u> $|e^{\alpha\tau}| \leq 1 + c\tau$ mit $c = \text{const.} \neq c(\tau, h)$
(exponentielles Wachstum ist zugelassen !)

$\boxed{\text{Ü7}}$ Untersuchen Sie das <u>DU-FORT-FRANKEL-Schema</u> (= Modifikation des Leapfrog-Schemas (18) mit $v_i^j \longrightarrow \frac{1}{2}(v_i^{j+1} + v_i^{j-1})$) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ges. } v : \overline{\omega}_{h\tau} \longmapsto \mathbf{R}^1 : \\ \dfrac{v_i^{j+1} - v_i^{j-1}}{2\tau} - \dfrac{v_{i-1}^j - (v_i^{j+1} + v_i^{j-1}) + v_{i+1}^j}{h^2} = \varphi_i^j , \qquad {\scriptstyle i=\overline{1,n-1}\,,\, j=\overline{1,m-1}} \\ + \text{RB} : v_0^j = g_0(t_j) \quad , \quad v_n^j = g_1(t_j) \qquad {\scriptstyle j=\overline{1,m}} \\ + \text{AB} : v_i^0 = u_0(x_i) \qquad {\scriptstyle i=\overline{0,n}} \\ + \text{ geeignetes (?) Einschrittverfahren zur Bestimmung von } v_i^1, \ {\scriptstyle i=\overline{1,n}} \ \text{!?} \\ \text{mit } \varphi_i^j = f(x_i, t_j) \ . \end{array}} \tag{19}$$

zur Diskretisierung von (17) auf Konsistenz (lokaler Approximationsfehler) und Stabilität (im V. NEUMANNschen Sinne).