P VIII Mittwoch, d. 4.12. 2002 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{00}}$ Uhr; Raum : T 711)

2.7 Analyse von Mehrschrittverfahren

Ü11 Man zeige, dass die höchst erreichbare Konsistenzordnung eines impliziten k-Schrittverfahrens $2k$ ist und die eines expliziten k-Schrittverfahrens $2k-1$ ist!

Ü12 Man zeige zunächst, dass das explizite Zweischrittverfahren ($k=2$)

$$u_{n+2} + 4u_{n+1} - 5u_n = h(4f_{n+1} + 2f_n) \tag{10}$$

die höchst mögliche Konsistenzordnung $p = 3$ hat! Wendet man dieses Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)) := u(t),\ t \geq 0, \quad u(0) = 1 \tag{11}$$

mit der exakten Startphase $u_0 = u(0) = 1$ und $u_1 = u(h) = e^h$ an, so erhält man völlig unbrauchbare Ergebnisse, auch und insbesondere für $h \to 0$, obwohl $f(t, u(t)) := u(t)$ offenbar im zweiten Argument Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $L = 1$ ist. Bestätigen Sie diese Behauptung durch numerische Experimente und begründen Sie die Behauptung theoretisch!

Ü13 Es sei $f(\cdot,\cdot)$ eine beschränkte, stetige und im zweiten Argument Lipschitz-stetige Funktion, d.h. es existiere eine positive Konstante L, sodass

$$|f(t,v) - f(t,w)| \leq L|v - w|,\ \forall v, w \in \mathbf{R}^N,\ \forall t \in I = [0, T]. \tag{12}$$

Man zeige, dass dann das Mehrschrittverfahren

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j u_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t_{n+j}, u_{n+j}), \quad n = 0, 1, \ldots, m-k \tag{13}$$

für hinreichend kleine h eindeutig durchführbar ist, d.h. für gegebene Werte $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung

$$u_{n+k} = g(t_n; u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}; h) \tag{14}$$

des Mehrschrittverfahrens (13).

Ü14 Man zeige, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit (12) der Funktion $f(\cdot,\cdot)$ mit der Lipschitz-Konstanten L die Lipschitz-Stetigkeit von $\Phi(t, U, h) := \psi(t, U, h)e_1$ in U mit der Lipschitz-Konstanten $L^\star = ?$ folgt, wobei $e_1 = (I, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbf{R}^{N\cdot k}$, $U = (u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1})^T \in \mathbf{R}^{N\cdot k}$ und

$$\psi(t, U, h) := \sum_{j=0}^{k-1} \beta'_j f(t_{n+j}, u_{n+j}) + \beta'_k f(t_{n+k}, g(t_n; u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+k-1}; h)) \tag{15}$$

mit $\beta'_j = \beta_j/\alpha_k$ und durch (14) definierten $g = u_{n+k} \in \mathbf{R}^N$ sind.