P VII Mittwoch, d. 27.11. 2002 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{00}}$ Uhr; Raum : T 711)

2.6 Numerische Experimente mit Mehrschrittverfahren

Wir betrachten folgendes **Räuber-Beute-Modell** (erweiterte *Lottka-Volterra-Gleichungen*)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x\,(\alpha - (\gamma_{11}x + \gamma_{12}y))\,, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y\,(\beta - (\gamma_{21}x + \gamma_{22}y))\,, \tag{9}$$

für zwei Spezies x und y.

E05 Sei $\alpha < 0$, $\gamma_{12} < 0$, $\beta > 0$, $\gamma_{21} > 0$ und $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$ (klassische *Lottka-Volterra-Gleichungen*).

1. Erklären Sie die Bedeutung der Konstanten. Wer ist Räuber, wer Beute?
2. Sei $\alpha = -1$, $\gamma_{12} = -0.01$, $\beta = 0.25$, $\gamma_{21} = 0.01$. Führen Sie für jede der vier Startwertkombinationen $x(0) = 30 \pm 1$, $y(0) = 80 \pm 1$ die folgenden Verfahren mit (jeweils mind. 3) unterschiedlichen Schrittweiten durch.
   (a) 2-Schritt, 3-Schritt Adams-Bashforth Formeln
   (b) 2-Schritt, 3-Schritt Adams-Moulton Formeln
   (c) 2-Schritt, 3-Schritt BDF Verfahren

   Visualisieren Sie die Resultate sowohl in einem $(t, x(t))$ bzw. $(t, y(t))$ Diagramm als auch in einem Phasendiagramm, d.h. durch die Kurve $\{(x(t), y(t)) : t \in [0, T]\}$ (T hinreichend groß).

E06 Sei jetzt $\alpha < 0$, $\gamma_{12} < 0$, $\beta > 0$, $\gamma_{21} > 0$, $\gamma_{22} > 0$ und $\gamma_{11} = 0$.

1. Sei die Population y sich alleine überlassen ($\gamma_{21} = 0$). Berechnen Sie die analytische Lösung für $y(t)$. Welche Schranke ergibt sich für das Wachstum der Population?
2. Sei $\alpha = -1$, $\gamma_{12} = -0.01$, $\beta = 0.25$, $\gamma_{21} = 0.01$, $\gamma_{22} = 0.003125$. Führen Sie für jede der vier Startwertkombinationen $x(0) = 30$, $y(0) = 10, 40, 80, 100$ ein 3-Schrittverfahren Ihrer Wahl mit unterschiedlichen Schrittweiten durch.

   Visualisieren Sie die Resultate wie zuvor sowohl in einem $(t, x(t))$ bzw. $(t, y(t))$ Diagramm als auch in einem Phasendiagramm.
3. Wird ein stabiler Zustand ($\neq (0, \bar{y})$) erreicht? Falls nicht, durch welche Parameterwahl kann ein solcher erreicht werden?