

**P VI** Mittwoch, d. 20.11. 2002 (Zeit : 10<sup>15</sup> – 11<sup>00</sup> Uhr; Raum : T 711 )

## 2.5 Analyse von Einschrittverfahren

**Ü07** Sei  $u_h(t+h)$  das Ergebnis eines Schrittes des expliziten Eulerverfahrens mit Startwert  $(t, u)$  und Schrittweite  $h$ . Entsprechend bezeichne  $u_{h/2}(t+h)$  das Ergebnis nach zwei Schritten des expl. Eulerverfahrens mit Startwert  $(t, u)$  und Schrittweite  $h/2$ . Bestimmen Sie Konstante  $c_1$  und  $c_2$ , sodass durch

$$\hat{u}_h(t+h) = c_1 u_h(t+h) + c_2 u_{h/2}(t+h)$$

ein Verfahren möglichst hoher Ordnung bestimmt wird. Stellen Sie dieses Verfahren als Runge-Kutta-Formel dar.

**Ü08** Einem Einschrittverfahren

$$u_h(t+h) = u_h(t) + h\varphi(t, u_h(t), h)$$

lässt sich durch die Substitution  $h \rightarrow -h$  und anschließender Substitution  $t \rightarrow t+h$  ein adjungiertes Einschrittverfahren zuordnen, das implizit durch die Bedingung

$$u_{-h}(t) = u_{-h}(t+h) - h\varphi(t+h, u_{-h}(t+h), -h)$$

gegeben ist, und das nach Auflösung bzgl.  $u_{-h}(t+h)$  die übliche Form

$$u_{-h}(t+h) = u_{-h}(t) + h\varphi^*(t, u_{-h}(t), h)$$

annimmt. Es gelte die Lipschitz-Bedingung

$$|\varphi(t, v, h) - \varphi(t, w, h)| \leq L|v - w|.$$

1. Zeigen Sie, dass das adjungierte Verfahren für hinreichend kleine Schrittweiten  $h$  wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie:  $(\varphi^*)^* = \varphi$ .

**Ü09** Es gelten die Voraussetzungen und Bezeichnungen von **Ü08**. Bestimmen Sie die adjungierten Verfahren zum expliziten Euler-Verfahren, zur expliziten Mittelpunktsregel (verbessertes Euler-Verfahren) und zur impliziten Mittelpunktsregel. Stellen Sie die adjungierten Verfahren als Runge-Kutta-Formel dar.

**Ü10** Gegeben sei das System

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in I := [0, T] \tag{7}$$

gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den Anfangsbedingungen  $u(0) = u_0$  und  $u'(0) = v_0$ . Schreiben Sie für das System (7) ein  $l$ -stufige, implizite Runge-Kutta-Formel in allgemeiner Form auf ( $g$ -Form bzw.  $k$ -Form), indem Sie das System zweiter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung überführen. Verwenden Sie dabei so wenig wie möglich zu speichernde Parameter ! Wie vereinfacht sich die Formel für den Fall, daß  $f$  nicht von  $u'$  abhängt ?

Betrachten Sie als Beispiel die implizite Trapezregel !