P V Mittwoch, d. 13.11. 2002 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{00}}$ Uhr; Raum : T 711)

2.4 Numerische Lösung komplizierter Anfangswertprobleme

E03 Die Bahn eines Satelliten in der Ebene des Erde-Mond-Systems läßt sich durch das folgende System von Dgl. 2. Ordnung beschreiben (vgl. Bsp. 3.5 der Vorlesung Numerik III) :

$$\boxed{\begin{array}{lll}
y_1'' = y_1 + 2y_2' - (1-\mu)\dfrac{y_1+\mu}{D_1} - \mu\dfrac{y_1-(1-\mu)}{D_2} & & , \\
y_2'' = y_2 - 2y_1' - (1-\mu)\dfrac{y_2}{D_1} - \mu\dfrac{y_2}{D_2} & , t \in [0,T] , & \\
+\ \text{AB}: \quad y_1(0) = 0.994 & & \\
\qquad y_1'(0) = 0 & & \\
\qquad y_2(0) = 0 & & \\
\qquad y_2'(0) = -2.001\,585\,106\,379\,082\,522\,405\,378\,622\,24 & & , \\
\text{mit} \quad D_1 = \left[(y_1+\mu)^2 + y_2^2\right]^{3/2} & , & \\
\qquad D_2 = \left[(y_1-(1-\mu))^2 + y_2^2\right]^{3/2} & , & \\
\qquad \mu = 0.012277471 & &
\end{array}} \tag{4}$$

Für diese Daten ergibt sich eine periodische Lösung mit der Periode

$$t_{per} = t = \underline{17.065\,216\,560\,157\,96}2\,558\,891\,720\,6249 \quad .$$

1) Man überführe (4) in eine äquivalente AWA für ein System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung ! Ist dieses System autonom ?

2) Man löse dieses System numerisch mit den folgenden Integrationsverfahren :

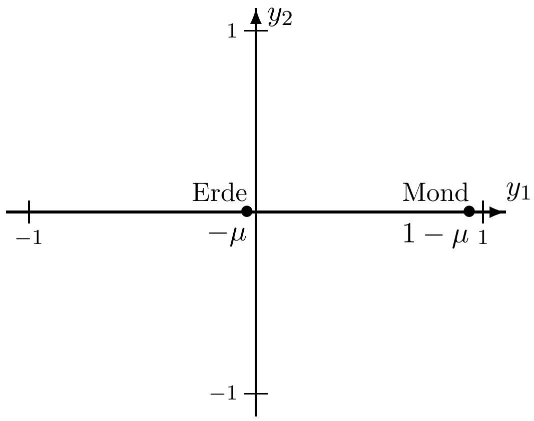
M1 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren mit dem Tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

mit $h = T/m$, $m = 6000$ und $m =?$ (eigene Wahl).

M2 Verfahren eigener Wahl !

3) Man stelle die Lösungstrajektoren $(y_{1h}(t), y_{2h}(t))$, $t \in I_h = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, linear interpoliert, grafisch dar !



Wählen Sie **eine** der beiden folgenden Aufgaben.

$\boxed{\text{E04.1}}$ Die Robertson–Reaktion wird durch das Dgl.-System

$$\boxed{\begin{array}{rcl} c_A'(t) &=& -0.04\,c_A(t) + 10^4\,c_B(t)c_C(t) \quad , \\ c_B'(t) &=& 0.04\,c_A(t) - 3\cdot 10^7\,c_B^2(t) - 10^4\,c_B(t)c_C(t) \quad , \\ c_C'(t) &=& 3\cdot 10^7\,c_B^2(t) \quad ,t\in[0,T]\ ,\ T=0.3 \\ +\ \text{AB}: & & c_A(0) = 1 \quad c_B(0) = 0 \quad c_C(0) = 0 \end{array}} \qquad (5)$$

beschrieben (vgl. $\boxed{\text{Ü02}}$). Aufgrund der Größenordnungsunterschiede in den Reaktionsgeschwindigkeitskoeffizienten ist zu erwarten, daß das Dgl.-System (5) steif ist.

Lösen Sie die AWA (5) mit einem geeigneten Integrationsverfahren und stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentrationen $c_A(t)$, $c_B(t)$ und $c_C(t)$ (getrennt) grafisch dar !

$\boxed{\text{E04.2}}$ Die Oregonator wird durch das Dgl.-System

$$\boxed{\begin{array}{rcl} c_1'(t) &=& -k_1c_1c_2 - k_3c_1c_3 \\ c_2'(t) &=& -k_1c_1c_2 - k_2c_2c_3 + k_5c_5 \\ c_3'(t) &=& k_1c_1c_2 - k_2c_2c_3 + k_3c_1c_3 - 2k_4c_3^2 \\ c_4'(t) &=& k_2c_2c_3 + 2k_4c_3^2 \\ c_5'(t) &=& k_2c_2c_3 - k_5c_5 \quad ,t\in[0,T]\ , \\ +\ \text{AB}: & & c_1(0) = 1/2 \quad c_2(0) = 1/2 \quad c_3(0) = 0 \\ & & c_4(0) = 0 \quad c_5(0) = 0\ , \\ \text{wobei} & & k_1 = 1.34 \quad k_2 = 1.6\cdot 10^9 \quad k_3 = 8.0\cdot 10^3 \\ & & k_4 = 4.0\cdot 10^7 \quad k_5 = 1.0 \end{array}} \qquad (6)$$

beschrieben (vgl. $\boxed{\text{Ü01}}$). Aufgrund der Größenordnungsunterschiede in den Reaktionsgeschwindigkeitskoeffizienten ist zu erwarten, daß das Dgl.-System (6) steif ist.

Lösen Sie die AWA (6) mit einem geeigneten (?) Integrationsverfahren und stellen Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentrationen $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$, $c_4(t)$ und $c_5(t)$ (getrennt) grafisch dar !