P IV Mittwoch, d. 6.11. 2002 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{00}}$ Uhr; Raum : T 711)

2.2 Praktische Durchführung von Einschrittverfahren

$\boxed{\times}$ Man studiere den gleichnamigen Punkt 3.3.5 im Skriptum zur Vorlesung Numerik III von U. Langer, S. 114-121.

2.3 Einfache numerische Experimente mit Einschrittverfahren

$\boxed{\text{E01}}$ Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{array}{rcl} u'(t) &=& B(u+A) \quad , \quad t \in I = [0,1] \\ u(0) &=& 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

mit $B = 3$ und $A = e^B - 1$.

a) Man bestimme die exakte Lösung von (2) analytisch !

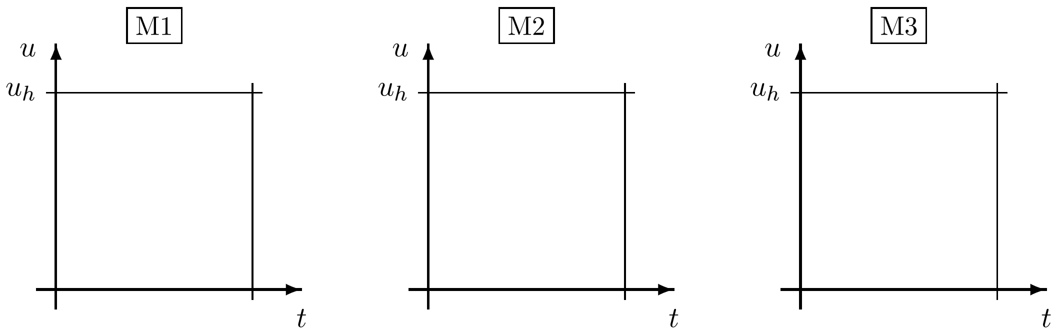
b) Man löse (2) mit den folgenden expliziten Runge-Kutta-Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ unter Verwendung der Schrittweiten $h = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8}$ und $\frac{1}{16}$;

$\boxed{\text{M1}}$ Explizites Euler-Verfahren,

$\boxed{\text{M2}}$ Verbessertes Euler-Verfahren,

$\boxed{\text{M3}}$ „klassisches“ Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 (siehe $\boxed{\text{Ü06}}$).

Man veranschauliche die Ergebnisse graphisch durch Vergleich der numerischen Lösungen für $h = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16}$ mit der analytischen Lösung :



Expliziter Euler — Verbesserter Euler — Klassisches Runge-Kutta

c) Man trage in die folgende Tabelle $\boxed{u_h(1)}$ als Approximation von $u(1) = \ldots$ für die betrachteten Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ ein :

h → Mx \		1	1/2	1/4	1/8	1/16	$u(1)$
M1	(*)						
	(E)					–	
M2	(*)						
	(E)					–	
M3	(*)						
	(E)					–	
MxE							

wobei (*) = ursprüngliches Verfahren

(E) = Verbesserung der Werte durch globale Extrapolation (siehe Skriptum Numerik III, 3.3.5.1) nach der Formel

$$\widehat{u}_h(t) \;=\; u_{h/2}(t) \;+\; \frac{u_{h/2}(t) \;-\; u_h(t)}{2p-1}$$

mit p =Ordnung des Verfahrens.

(MxE) = Verfahren Mx für ein x$\in \{1,2,3\}$ mit lokaler Extrapolation (siehe Skriptum Numerik III, 3.3.5.1).

$\boxed{\text{E02}}$ Wir betrachten das Anfangswertproblem

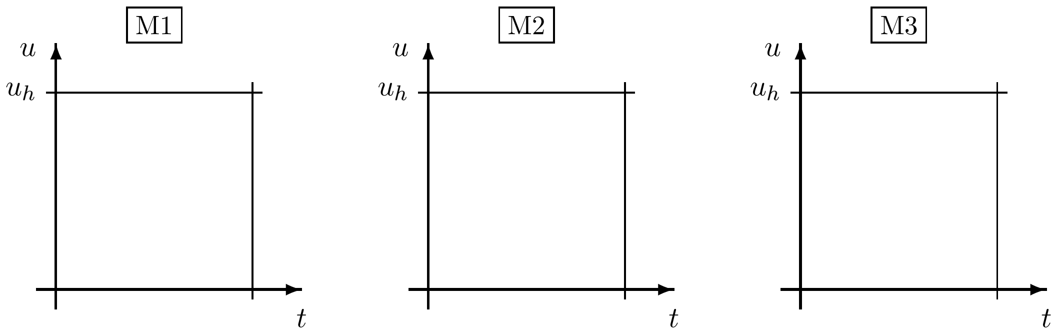
$$\left.\begin{array}{rcl} u'(t) & = & -\,50\,(u(t)\;-\;\cos(t)) \quad , \quad t \in I \;=\; [0, 1.5] \\ u(0) & = & 0 \qquad . \end{array}\right\} \qquad (3)$$

a) Man bestimme die exakte Lösung von (3) analytisch !

b) Man löse (3) mit den folgenden Runge-Kutta-Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ unter Verwendung der Schrittweiten $h \;=\; \frac{1}{20}\,,\; \frac{3}{80}\,,\; \frac{1}{30}\,,\; \frac{1}{40}\;;$

$\boxed{\text{M1}}$ Explizites Euler-Verfahren,
$\boxed{\text{M2}}$ Verbessertes Euler-Verfahren,
$\boxed{\text{M3}}$ Implizites Euler-Verfahren.

Man veranschauliche die Ergebnisse graphisch durch Vergleich der numerischen Lösungen für $h \;=\; \frac{1}{20}\,,\; \frac{3}{80}\,,\; \frac{1}{30}\,,\; \frac{1}{40}$ mit der analytischen Lösung :



Expliziter Euler | Verbesserter Euler | Impliziter Euler

c) Man starte die Explizite Eulermethode bei $t_0 \;=\; 1/2$ mit der exakten Lösung $u(t_0) \;\equiv\; u(1/2)$ unter Verwendung der Schrittweite $h \;=\; 1/20$ und stelle das Re-

sultat wieder im Vergleich mit der analytischen Lösung graphisch dar.
Ab welcher Schrittweite muß das Verfahren stabil werden? (siehe Skriptum Kapitel 3.5 "Steife Differentialgleichungen")

d) Lösen Sie (3) nochmals mit dem impliziten Euler-Verfahren und der Schrittweite $h = 1/2$. Stellen Sie das Resultat wieder im Vergleich mit der analytischen Lösung graphisch dar.

e) Man trage in die folgende Tabelle $\boxed{u_h(1.5)}$ als Approximation von $u(1.5) = \ldots$ für die betrachteten Verfahren $\boxed{\text{Mx}}$ ein :

Mx \ h	1/20	3/80	1/30	1/40	$u(1.5)$
M1					
M2					
M3					