P II Mittwoch, d. 23.10. 2002 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{00}}$ Uhr; Raum : T 711)

Ü04 Verwendet man anstelle der Mittelpunktsregel die Trapezregel (TR) zur Berechnung des Integrals $\int_t^{t+h} f(s,u(s))\,ds$ so erhält man das Verfahren von Heun :

$$\int_t^{t+h} f(s,u(s))\,ds \overset{\text{TR}}{\approx} \frac{h}{2}\left[f(t,u(t)) + f(t+h,u(t+h))\right]$$

$$\Uparrow$$
$$\text{EPZV}$$
$$u(t+h) \approx u(t) + hf(t,u(t))$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_1 &= f(t,u) \\ K_2 &= f(t+h, u + hK_1) \\ u_h(t+h) &= u + \frac{h}{2}K_1 + \frac{h}{2}K_2 \end{aligned}}$$

Damit ergibt sich für das Verfahren von Heun das folgende Tableau :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} ,$$

d.h. das Verfahren von Heun ist eine 2-stufige Runge-Kutta-Formel und es gilt :

$$u(t+h) = u(t) + \frac{h}{2}\left[f(t,u) + f(t+h, u+hf(t,u)\right] .$$

Man zeige durch Taylor-Entwicklung des lokalen Fehlers $u(t+h) - u_h(t+h)$, daß das Verfahren von Heun die Konsistenzordnung 2 besitzt !

Ü05 Für die autonome Differentialgleichung

$$\begin{cases} v'(t) = g(v(t)) \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

sei eine ℓ-stufige Runge-Kutta-Formel durch das Tableau (Koeffizienten $\{c_i\}_{i=\overline{2,\ell}}$ kommen im Falle autonomer Dgl. nicht vor !)

$$\begin{array}{|cccc} a_{21} & & & \\ a_{31} & a_{32} & & \\ \vdots & & & \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \dots & a_{\ell,\ell-1} \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_\ell \end{array} \qquad (*)$$

gegeben und habe die Ordnung p.

Für eine allgemeine Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ist dann eine ℓ-stufige Runge-Kutta-Formel der Ordnung p durch das Tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
 & \vdots & & & \\
c_\ell & a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \dots & a_{\ell,\ell-1} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_\ell
\end{array} \tag{**}$$

gegeben, falls

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad , \quad {\scriptstyle i=\overline{2,\ell}} \quad . \tag{1}$$

gilt. Zu zeigen ist also, daß die Runge-Kutta-Formel (*) für die autonome Dgl. dieselben Näherungen liefert wie (**) für eine allg. Dgl., falls (1) gilt.