$\boxed{\textbf{P X}}$ Mittwoch, d. 8.1. 2003 (Zeit : $10^{\underline{15}}$ – $11^{\underline{00}}$ Uhr; Raum : T 711)

3 Numerische Behandlung parabolischer ARWA

3.1 Differenzenverfahren

3.1.1 Ein spezielles diskretes Eigenwertproblem

stetig	diskret
Ges. $u \in C^2(0,\ell) \cap C[0,\ell]$: $u \not\equiv 0$ und $\lambda \in \mathbf{R}$: $-u''(x) = \lambda u(x)\ , x \in \Omega = (0,\ell)$ (16) $u(0) = u(\ell) = 0$	Ges. $v : \overline{\omega}_h \mapsto \mathbf{R}^1$: $v \not\equiv 0$ und $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \in \omega_h = \{x_\imath = \imath h : \imath = \overline{1, n-1}$: $-v_{\overline{x}x}(x) = \lambda v(x)$ (16_h) $v_0 = v_n = 0 \qquad h = \ell/n$
Homog. lin. Dgl. mit konst. Koeff. ! $-u'' - \lambda\, u = 0$	Matrixeigenwertproblem $\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$
1. Eigenfunktionen	
$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \quad x \in [0,\ell]$ $k = 1, 2, \ldots$	$\mu_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \quad x \in \overline{\omega}_h$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$
2. Eigenwerte	
$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \qquad k = 1, 2, \ldots$ $0 < \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \longrightarrow \infty$	$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2\ell} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$ $\frac{8}{\ell^2} \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots < \lambda_{n-1} < \frac{4}{h^2} \longrightarrow \infty$
3. Orthonormalität der Eigenfunktionen	
$(u_k, u_m)_{L_2(\Omega)} := \int\limits_0^\ell u_k(x) u_m(x) dx = \delta_{k,m}$ $k, m = 1, 2, \ldots$	$(\mu_k, \mu_m)_h := \sum\limits_{x \in \omega_h} h \mu_k(x) \mu_m(x) = \delta_{k,m}$ $k, m = 1, 2, \ldots, n-1$

4. Ableitungen (bzw. Differenzen) der Eigenfunktionen	
$u_k'(x) \;=\; \sqrt{\lambda_k}\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}\cos\dfrac{k\pi x}{\ell}\,, \quad x \in [0,\ell]$ $k = 1, 2, \ldots$	$\mu_{k,\overline{x}}(x) \;=\; \sqrt{\lambda_k}\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}\cos\dfrac{k\pi(x-h/2)}{\ell}\,, \quad x \in \overline{\omega}_h$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$

5. Orthogonalität der Ableitungen (bzw. Differenzen) der Eigenfunktionen	
$\displaystyle\int_0^\ell u_k'(x)u_m'(x)dx \;=\; \lambda_k\delta_{k,m}$ $k = 1, 2, \ldots$	$\displaystyle(\mu_{k,\overline{x}}, \mu_{m,\overline{x}}]_h \;=\; \sum_{x\in\vec{\omega}_h} h\mu_{k,\overline{x}}(x)\mu_{m,\overline{x}}(x) \;=\; \lambda_k\delta_{k,m}$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$ $\vec{\omega}_h \;=\; \{x_\imath = \imath h \;:\; \imath = \overline{1,n}\}$

6. Über die Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen	
Sei $f \in L_2(\Omega)$, $\Omega = (0,\ell)$. Dann gilt für die Fourierreihe : $\displaystyle f(x) \;\text{“ = “}\; \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, u_k(x)$ $\downarrow$ $f_k \;=\; (f, u_k)_{L_2(0,\ell)}$ • i.S. $L_2(0,\ell)$ falls $f \in L_2(0,\ell)$, d.h. $\displaystyle\parallel f - \sum_{k=1}^{m} f_k\, u_k(x) \parallel_{L_2} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ • i.S. $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, falls $f \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$. • i.S. $C(\overline{\Omega})$, falls $f \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$.	$\forall f(\cdot) \,:\, \omega_h \longmapsto \mathbf{R}^1$ -Gitterfunktionen gilt : $\displaystyle f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} f_k\,\mu_k(x)\,,\; x \in \omega_h$ $\downarrow$ Fourierkoeffizienten $\displaystyle f_k \;=\; (f, \mu_k)_h \;\equiv\; \sum_{x\in\omega_h} hf(x)\mu_k(x)$

7. Die Parseval'sche Gleichung	
$\displaystyle\parallel f \parallel^2_{L_2(0,\ell)} \;:=\; \int_0^\ell f(x)^2dx \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$	$\displaystyle\parallel f \parallel^2_{L_2(\omega_h)} \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} f_k^2$

Ü19 Man löse das diskrete EWP (16_h) bzw. man beweise, daß die angegebenen Eigenfunktionen (1.) und Eigenwerte (2.) richtig sind !

○ Hinweis : Ansatz $v(x) = c \cdot \sin(\alpha x)$ oder exp-Ansatz.

Ü20 Man beweise die Ungleichungen :

a) $\left(\dfrac{2k}{\ell}\right)^2 < \lambda_k < \left(\dfrac{\pi k}{\ell}\right)^2 \qquad \forall k = \overline{1, n-1}$

b) $\dfrac{8}{\ell^2} < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots < \lambda_{n-1} < \dfrac{4}{h^2}$!

$\boxed{\text{Ü21}}$ Man zeige, daß die Eigenfunktionen $\overline{\mu}_k = c \cdot \sin \dfrac{k\pi}{\ell} x$, $x \in \omega_h$, $k = \overline{1, n-1}$ für $c = \sqrt{2/\ell}$ bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_h$ orthonormal sind !

$\boxed{\text{Ü22*}}$ Man zeige die Beziehungen 4. und 5. für die rückwärtigen Differenzen der diskreten Eigenfunktionen !