

Analytische Lösungen spezieller Probleme der Strömungsmechanik

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

BACHELOR

in der Studienrichtung

TECHNISCHE MATHEMATIK

Angefertigt am *Institut für Numerische Mathematik*

Betreuung:

O. Univ. Prof. Dipl. Ing. Dr. Ulrich Langer

Eingereicht von:

Daniel Temesvari

Linz, November 2013

Abstract

The flow of incompressible Newtonian fluids can mathematically be described by the Navier-Stokes equations, which can be derived from the mass and impulse conservation and the constitutive law. Initial and boundary conditions complete the mathematical model. In general, this mathematical model can not be solved analytically. Therefore, the fluid simulation is based on numerical methods. However, there are some important special cases where the Navier-Stokes equations can be solved analytically under appropriate assumptions. These special settings can be served as benchmarks for testing CFD codes. In this thesis, such benchmarks will be derived from the Navier-Stokes equations.

Zusammenfassung

Die Strömung von inkompressiblen, Newtonschen Fluiden kann mathematisch mit den Navier-Stokes Gleichungen beschrieben werden, die aus der Massen- und Impulserhaltung und dem Materialgesetz hergeleitet werden. Anfangs- und Randwerte vervollständigen das mathematische Modell. Im Allgemeinen kann dieses mathematische Modell nicht analytisch gelöst werden. Deswegen basieren Fluid-Simulationen auf numerischen Methoden. Dennoch gibts es einige wichtige Spezialfälle, wo die Navier-Stokes Gleichungen, unter geeigneten Annahmen, analytische gelöst werden können. Diese speziellen Szenarien können zum Testen von CFD Codes als Benchmark (Bezugspunkt) dienen. In dieser Thesis werden solche Benchmarks aus den Navier-Stokes Gleichungen hergeleitet.

Danksagungen

Ich möchte mich bei meinem Betreuer, Professor Ulrich Langer, für die Möglichkeit diese Arbeit zu verfassen und für die Unterstützung, die ich von ihm erhielt, bedanken.

Daniel Temesvari
Linz, November 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbemerkungen	2
3	Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen	5
4	Spezielle Beispiele mit analytischen Lösungen	13
5	Folgerungen	31
	Literaturverzeichnis	32

Kapitel 1

Einleitung

Die Navier-Stokes Gleichungen beschreiben das Verhalten von Fluiden. Dies geschieht in Form der Angabe eines Systems von partiellen Differentialgleichungen, die die vektorwertige Geschwindigkeitsfunktion und die skalaren Dichte- und Druckfunktionen miteinander verknüpfen. Durch die Vorgabe, dass das Fluid inkompressibel ($\rho = \text{const.}$) und newtonisch ist, erhält man schließlich ein System von 4 partiellen Differentialgleichungen für 4 skalare Funktionen, nämlich den Druck und die 3 Komponenten der Geschwindigkeit, die jeweils von 4 Variablen, der Zeit und den 3 Ortskoordinaten, abhängen.

Um analytische Lösungen konkreter Beispiele aufzufinden sind jedoch noch weitere Vereinfachungen notwendig. Eine solche Vereinfachung ist die Ausnützung von Symmetrien, die das Beispiel eventuell besitzt. Bewerkstelligt wird die Vereinfachung durch die Wahl des Koordinatensystems, beispielsweise Zylinderkoordinaten für radialsymmetrische Probleme.

Eine weitere Möglichkeit der Vereinfachung bietet sich durch die sogenannten dimensionslosen Gleichungen, die es erlauben, Strömungen zu betrachten, die von der Viskosität dominiert werden. Es wäre auch möglich, nichtviskose Strömungen zu untersuchen.

Schlussendlich lässt sich das bis hierhin erhaltene Problem oftmals mit Mitteln der Theorie über Differentialgleichungen auf einfachere Differentialgleichungen überführen und lösen.

Kapitel 2

Vorbemerkungen

Lagrangesche Beschreibung:

Bei der Lagrangeschen Beschreibungsweise wird die Bewegung des Fluids für jedes Fluidpartikel im Kontinuum einzeln beschrieben. Dazu ist die Angabe einer Ortskoordinate zu einem fest gewählten Referenzzeitpunkt und die Angabe der Trajektorie für ein Zeitintervall nötig.

Sei dazu $(T_1, T_2) \subset \mathbb{R}$ dasjenige Zeitintervall in dem die Bewegung des Fluids verfolgt wird und $t_0 \in (T_1, T_2)$ der fest gewählte Referenzzeitpunkt. Das Raumgebiet $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, sei jenes Gebiet, das zum Zeitpunkt $t \in (T_1, T_2)$ vom Fluid eingenommen wird. Sei $X \in \Omega(t_0)$ die Ortskoordinate eines Fluidpartikels zum Referenzzeitpunkt t_0 . Da keine Selbstdurchdringung der Fluidpartikel stattfinden kann, lässt sich die Trajektorie eines Fluidpartikels als bijektive Abbildung darstellen:

$$\varphi : \Omega(t_0) \times (T_1, T_2) \longrightarrow \Omega(t), \quad (X, t) \longmapsto \varphi(X, t), \quad (2.1)$$

wobei $(X, t) \in \Omega(t_0) \times (T_1, T_2)$ die sogenannten Lagrange Koordinaten sind.

Aus obigen Festlegungen folgt für die Geschwindigkeit \hat{v} und die Beschleunigung \hat{a} :

$$\hat{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \quad \text{und} \quad \hat{a}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t). \quad (2.2)$$

Eulersche Beschreibung:

Bei der Eulerschen Beschreibungsweise wird die Bewegung des Fluids durch die Angabe des Geschwindigkeitsfelds $v(x, t)$ beschrieben, d.h. es wird die Geschwindigkeit des Partikels im Ort x zum Zeitpunkt t angegeben.

$(x, t) \in D := \Omega(t) \times (T_1, T_2)$ sind die sogn. Euler Koordinaten.

Damit folgt für die Geschwindigkeit:

$$v(x, t) = \widehat{v}(X, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t), \quad (2.3)$$

mit $x = \varphi(X, t)$.

Für die Beschleunigung gilt:

$$\begin{aligned} a(x, t) &= \widehat{a}(X, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \right] = \frac{\partial}{\partial t} [v(\varphi(X, t), t)] \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(X, t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_i}(x, t) v_i(x, t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x, t). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$a(x, t) = v(x, t) \cdot \nabla v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) =: \frac{dv}{dt}(x, t), \quad (2.4)$$

wobei $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$ materielle oder totale Ableitung genannt wird.

Zusammenhang zwischen Lagrangescher und Eulerscher Beschreibung:

Für ein Geschwindigkeitsfeld $v : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ erhält man die Trajektorie $\varphi(X, t)$ des Fluidpartikels mit Lagrange Ortskoordinate X als Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t) \text{ mit Anfangswert: } x(t_0) = X. \quad (2.5)$$

Das Transporttheorem:

Zur Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen ist es notwendig Zeitableitungen von Integralen über zeitabhängige Integrationsbereiche zu betrachten. Das Transporttheorem liefert dazu die theoretische Grundlage. Seine Aussage lautet:

Satz 2.1: (Transporttheorem)

Voraussetzungen:

$t_0 \in (T_1, T_2)$, $\omega(t_0) \subset \Omega(t_0)$ sei ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzstetigem Rand, wobei für den Abschluss des Gebiets gilt: $\overline{\omega(t_0)} \subset \Omega(t_0)$.

Seien $v : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Sei $\mathcal{F}(t) =: \int_{\omega(t)} F(x, t) dx$ mit $\omega(t) =: \{\varphi(X, t) : X \in \omega(t_0)\}$.

Aussage: Dann ist \mathcal{F} wohldefiniert, stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(Fv)(x, t) \right] dx,$$

wobei $\operatorname{div}(Fv) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial(Fv_i)}{\partial x_i}$.

Beweis:

Sei \mathcal{J} die Funktionaldeterminante der Abbildung $\varphi(X, t)$, also $\mathcal{J} := \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} \right)_{i,j=1}^3$.

Mit Hilfe der Substitution des Integrationsbereich auf den Referenzzeitpunkt t_0 lässt sich der Integrand $F(x, t)$ der Zeitableitung zugänglich machen:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t_0)} F(x, t) dt = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t_0)} F(\varphi(X, t), t) |\mathcal{J}(X, t)| dt.$$

Da gilt, dass $\varphi(X, t_0) = X$, folgt $\mathcal{J}(X, t_0) = 1$. Mit der Stetigkeit von \mathcal{J} gilt dann, dass es (t_1, t_2) gibt, so dass \mathcal{J} positiv und beschränkt auf $\omega(t_0) \times (t_1, t_2)$. Mit der Nichtdurchdringungseigenschaft folgt, dass \mathcal{J} positiv und beschränkt auf $\omega(t_0) \times (T_1, T_2)$ ist. Siehe dazu [1; 28]. Damit kann man den Absolutbetrag um \mathcal{J} in obigem Integral weglassen. Man erhält also:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\omega(t_0)} F(\varphi(X, t), t) \mathcal{J}(X, t) dt = \int_{\omega(t_0)} \frac{\partial}{\partial t} (F(\varphi(X, t), t) \mathcal{J}(X, t)) dt = \\ &= \int_{\omega(t_0)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \operatorname{grad} F(x, t) \right) \mathcal{J}(X, t) + F(x, t) \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(X, t) dt. \end{aligned}$$

Weiters gilt: $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(X, t) = \mathcal{J}(X, t) \operatorname{div} v(x, t)$, siehe dazu [1; Seite 28-29], und damit:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \int_{\omega(t_0)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(X, t) \operatorname{grad} F(x, t) \right) \mathcal{J}(X, t) + F(x, t) \mathcal{J}(X, t) \operatorname{div} v(x, t) dt = \\ &= \int_{\omega(t_0)} \left(\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(Fv)(x, t) \right) \mathcal{J}(X, t) dt = \int_{\omega(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(Fv)(x, t) dt. \end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen für inkompressible, Newtonsche Fluide können aus der Massenerhaltung und der Impulserhaltung, sowie dem Materialgesetz für Newtonsche Fluide hergeleitet werden. Dies führt auf die sogenannte Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen.

Die Kontinuitätsgleichung:

Die Kontinuitätsgleichung lässt sich mit Hilfe des Transporttheorems aus der Massenerhaltung herleiten. Sei dazu wieder $\omega(t) := \{x = \varphi(X, t) : X \in \omega(t_0)\}$ ein Kontrollgebiet, das eine fixierte Menge an Fluidpartikeln zum Zeitpunkt $t \in (T_1, T_2)$ einnimmt. Da das Gebiet quellenfrei ist, muss die Massenerhaltung gelten, also:

$$\forall t \in (T_1, T_2) : \mathcal{F}(t_0) = \mathcal{F}(t) \text{ bzw. } \frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = 0, \quad (3.1)$$

mit $\mathcal{F}(t) := \int_{\omega(t)} \rho(x, t) dx$, wobei $\rho(x, t)$ die Dichte des Fluids bezeichnet.

Das Transporttheorem liefert die integrale Form der Kontinuitätsgleichung:

$$\forall t \in (T_1, T_2) \forall \overline{\omega(t)} \subset \Omega(t) : 0 = \frac{d\mathcal{F}}{dt}(t) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho v)(x, t) \right] dx. \quad (3.2)$$

Aus der Beliebigkeit des Kontrollgebiets $\omega(t)$ folgt die differentielle Form:

$$\forall (x, t) \in D : \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho v)(x, t) = 0. \quad (3.3)$$

Die Bewegungsgleichungen:

Das zweite Newtonsche Gesetz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines abgeschlossenen Massensystems gleich der auf das Massensystem wirkenden Kräfte sein muss (Impulserhaltungssatz), das heißt:

$$\forall t \in (T_1, T_2) \forall \overline{\omega(t)} \subset \Omega(t) : \frac{d\mathcal{I}}{dt}(t) = F(\omega(t)) = F_v(\omega(t)) + F_s(\omega(t)), \quad (3.4)$$

wobei $\mathcal{I} := \int_{\omega(t)} v(x, t) \rho(x, t) dx$ den Impuls, $F_v := \int_{\omega(t)} f(x, t) \rho(x, t) dx$ die Volumenkraft und $F_s := \int_{\partial\omega(t)} t^{(n)}(x, t) dx = \int_{\partial\omega(t)} \left[\sum_{j=1}^d \sigma_{ji}(x, t) n_j(x, t) \right] dx$ die Oberflächenspannung bezeichnet, mit der totalen Spannung $t^{(n)}(x, t)$, dem Normalvektor der Oberfläche $n(x, t)$ und dem Spannungstensor $\sigma = [\sigma_{ji}]_{j,i=1}^d$. Mit dem Gaussischen Divergenzansatz lässt sich das Oberflächenintegral, auf ein Integral über das Gebiet $\omega(t)$ überführen:

$$F_s = \int_{\partial\omega(t)} \left[\sum_{j=1}^d \sigma_{ji}(x, t) n_j(x, t) \right] dx = \int_{\omega(t)} \left[\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}(x, t) \right] dx. \quad (3.5)$$

Im Folgenden werden die Argumente weggelassen um eine besser Übersichtlichkeit zu gewährleisten. Die Anwendung des Transporttheorems liefert dann die Integralformulierung:

$$\forall i = 1, \dots, d : \frac{d\mathcal{I}}{dt} = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i) v \right] dx = \int_{\omega(t)} \left[f_i \rho + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right] dx. \quad (3.6)$$

Aufgrund der Beliebigkeit des Integrationsbereichs folgt wiederum die differentielle Formulierung, hier in der konservativen Form:

$$\forall (x, t) \in D : \forall i = 1, \dots, d : \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i) v = f_i \rho + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}. \quad (3.7)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung lässt sich die konservative Form der differentiellen Formulierung auf die konvektive Form überführen:

$$\forall (x, t) \in D : \forall i = 1, \dots, d : \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho (v \cdot \nabla) v_i = f_i \rho + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}. \quad (3.8)$$

Die Bewegungsgleichungen lassen sich noch kompakter schreiben als:

$$\forall (x, t) \in D : \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (v \cdot \nabla) v = f \rho + \operatorname{div} \sigma. \quad (3.9)$$

Spezialfall: inkompressible, Newtonsche Fluide

Folgerung für die Kontinuitätsgleichung:

Aus der Inkompressibilität des Fluids folgt, dass sich die Dichte $\rho > 0$ weder zeitlich, noch räumlich ändert. Das heißt $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, d$ bzw. für die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} (x, t) + \operatorname{div}(\rho v)(x, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} (x, t) + v \nabla \rho(x, t) + \rho \operatorname{div}(v)(x, t) = \rho \operatorname{div}(v)(x, t) = 0.$$

Da $\rho > 0$ folgt also die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide:

$$\forall (x, t) \in D : \operatorname{div}(v)(x, t) = 0. \quad (3.10)$$

Folgerungen für die Bewegungsgleichungen:

Um die Bewegungsgleichungen für ein inkompressibles, Newtonsches Fluid zu erhalten, muss ein Materialgesetz eingesetzt werden. Dieses Materialgesetz lautet:

$$\sigma = -pI + \tau, \quad (3.11)$$

wobei p den Druck, I die Einheitsmatrix und τ die Scherspannung bezeichnet.

Für τ gilt weiter: $\tau = \lambda \operatorname{div}(v)I + 2\mu \epsilon$ mit $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, $\mu \geq 0$ und

$\epsilon = [\epsilon_{ij}]_{i,j=1}^d = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]_{i,j=1}^d$, wobei μ die dynamische Viskosität und ϵ den Cauchyschen Verzerrungstensor bezeichnet. Zur Herleitung dieses Materialgesetzes siehe [1; Seite 45-48].

Daraus folgt mit der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide (3.10):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} (x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div}(v) \right) (x, t) + \mu \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) (x, t) = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} (x, t) + \mu \sum_{j=1}^d \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right] (x, t) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} (x, t) + \mu \Delta v_i (x, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div}(v) (x, t) = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} (x, t) + \mu \Delta v_i (x, t). \end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\operatorname{div} \sigma (x, t) = -\nabla p (x, t) + \mu \Delta v (x, t). \quad (3.12)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (3.9) und anschließende Division durch die Dichte ρ liefert die Bewegungsgleichungen für inkompressible, Newtonsche Fluide:

$$\forall (x, t) \in D : \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v \cdot \nabla) v(x, t) - (\nu \Delta v)(x, t) + \frac{1}{\rho} \nabla p(x, t) = f(x, t), \quad (3.13)$$

wobei $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die kinematische Viskosität ist.

Anfangsrandwertaufgabe in karthesischen Koordinaten:

Im Folgenden bezeichne Γ_D und Γ_N den Dirichlet- bzw. Neumannrand des Gebiets Ω . Weiters wird die Notation $C^{i,j}(A, B)$, für die Menge der i -fach bezüglich der räumlichen Variablen und j -fach bezüglich der zeitlichen Variable stetig differenzierbaren Funktion von A nach B , verwendet.

Sei $Q := \Omega(t) \times (t_a, t_e)$, $(t_a, t_b) \subset (T_1, T_2)$, das Raumzeitgebiet auf dem das Problem gestellt ist. $Q_1 := Q \setminus ((\Gamma_D \cup \Gamma_N) \times (t_a, T_e))$, $Q_2 := Q \setminus (\Gamma_D \times (t_a, t_e))$.

Gesucht:

$$v \in C^{2,1}(Q_1, \mathbb{R}^3) \cap C^{1,0}(Q_2, \mathbb{R}^3) \cap C(Q, \mathbb{R}^3) \text{ und } p \in C^{1,0}(Q_1, \mathbb{R}^3) \cap C(Q, \mathbb{R}^3),$$

so dass gilt:

$$\forall (x, t) \in Q : \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v \cdot \nabla) v(x, t) - (\nu \Delta v)(x, t) + \frac{1}{\rho} \nabla p(x, t) = f(x, t)$$

$$\forall (x, t) \in Q : \operatorname{div}(v)(x, t) = 0$$

$$\text{Anfangswert: } \forall x \in \bar{\Omega}(t_0) : v(x, t_0) = v_{t_0}(x),$$

$$\text{Dirichlet Randwert: } \forall (x, t) \in \Gamma_D(t) \times (t_a, t_e) : v(x, t) = v_D(x, t),$$

$$\text{Neumann Randwert: } \forall (x, t) \in \Gamma_N(t) \times (t_a, t_e) : t^{(n)}(x, t) = 0,$$

$$\text{wobei } \forall t \in (t_a, t_e) : \Gamma_D(t) \cup \Gamma_N(t) = \partial\Omega(t) \wedge \Gamma_D(t) \cap \Gamma_N(t) = \emptyset$$

$$\text{und } f \in C(Q_1, \mathbb{R}^3), v_D \in C(\Gamma_D \times (t_a, t_e), \mathbb{R}^3).$$

Transformation auf andere Koordinatensysteme:

Bei vielen Problemstellungen lässt sich das Auffinden der Lösung durch Ausnutzung der Symmetrien wesentlich vereinfachen. Bewerkstelligen lässt sich dies durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems. Es ist daher notwendig das Transformationsverhalten der Navier-Stokes-Gleichungen unter Koordinatenwechsel zu betrachten.

Satz 3.1:

Sei die Abbildung $F : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1; q := (q_1, q_2, q_3) \longmapsto (x_1, x_2, x_3) =: x$ regulär. Ω_1 und Ω_2 seien dasselbe Gebiet, das einmal in kartesischen, und zum anderen in den neuen Koordinaten gegeben ist.

Dann transformieren sich die Basisvektoren $e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}$ folgendermaßen:

$$e_{q_i} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q_i}(F^{-1}(x))}{\left\| \frac{\partial F}{\partial q_i}(F^{-1}(x)) \right\|} \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Beweis:

Die Regularität der Abbildung F ist gleichbedeutend damit, dass die Funktionaldeterminante nirgends verschwindet. Das garantiert die Existenz einer Umkehrfunktion F^{-1} und folgende Darstellung der Jacobi-Matrix:

$$\mathcal{J}(x) = \frac{\partial F}{\partial q}(q) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial q_j}(q) \right]_{i,j=1}^3 = \left[\frac{\partial F_i}{\partial q_j}(F^{-1}(x)) \right]_{i,j=1}^3.$$

Die Einheitsvektoren erhält man schließlich durch die Multiplikation:

$$e_{q_i} = \frac{\mathcal{J}e_{x_i}}{\|\mathcal{J}e_{x_i}\|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q_i}(F^{-1}(x))}{\left\| \frac{\partial F}{\partial q_i}(F^{-1}(x)) \right\|} \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

□

Satz 3.2:

Sei $v : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3, v \in C^2(\Omega_2)$, eine vektorwertige Funktion in kartesischen Koordinaten. Dann lautet die Funktion sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen in kartesischen Koordinaten, ausgedrückt durch die Komponenten der Funktion in den neuen Koordinaten:

$$v_{x_i} = \left(\sum_{j=1}^3 v_{q_j} e_{q_j} \right) \cdot e_{x_i} \text{ für } i \in \{1, 2, 3\},$$

$$\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_{x_i}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\},$$

$$\frac{\partial^2 v_{x_i}}{\partial x_j^2} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 v_{x_i}}{\partial q_k^2} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial v_{x_i}}{\partial q_k} \frac{\partial^2 q_k}{\partial x_j^2} \right) \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Beweis:

Für die Funktion v gibt es eine Darstellung der Form $v = v_{q_1}e_{q_1} + v_{q_2}e_{q_2} + v_{q_3}e_{q_3}$ im neuen Koordinatensystem. Multiplikation mit den Einheitsvektoren $e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}$ liefert:

$$v_{x_i} = v \cdot e_{x_i} = (v_{q_1}e_{q_1} + v_{q_2}e_{q_2} + v_{q_3}e_{q_3}) \cdot e_{x_i} \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Die zweite und dritte Gleichung erhält man nach einmaligem, beziehungsweise zweimaligem Ableiten dieser Gleichungen unter Anwendung der Kettenregel. \square

Damit lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen für das Geschwindigkeits- und Druckfeld im neuen Koordinatensystem, durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Navier-Stokes-Gleichungen in kartesischen Koordinaten, ermitteln.

Für einen Algorithmus zur Durchführung der Transformation siehe [1; Seite 70-76].

Im Weiteren werden analog zur Anfangsrandwertaufgabe in kartesischen Koordinaten die Bezeichnungen $D, D_1, D_2, \Gamma_N, \Gamma_D, v_D, v_{t_0}, t^{(n)}$ und f verwendet, bezeichnen hier jedoch die entsprechenden Größen im neuen Koordinatensystem.

Transformation auf Zylinderkoordinaten:

Durch die Transformation von (x, y, z) auf $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ gehen die Gleichungen von kartesischen Koordinaten über auf Zylinderkoordinaten.

$$\nabla p := \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)^T,$$

$$\operatorname{div} v := \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\Delta v := \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix},$$

$$(v \cdot \nabla) v := \begin{pmatrix} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Anfangsrandwertaufgabe in Zylinderkoordinaten:

Gesucht:

$$v \in C^{2,1}(Q_1, \mathbb{R}^3) \cap C^{1,0}(Q_2, \mathbb{R}^3) \cap C(Q, \mathbb{R}^3) \text{ und } p \in C^{1,0}(Q_1, \mathbb{R}^3) \cap C(Q, \mathbb{R}^3),$$

sodass gilt:

$$\forall (r, \varphi, z, t) \in Q : \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v - \nu \Delta v + \frac{1}{\rho} \nabla p = f$$

$$\forall (r, \varphi, z, t) \in Q : \operatorname{div} v = 0$$

Anfangswert: $\forall (r, \varphi, z) \in \overline{\Omega}(t_0) : v(r, \varphi, z, t_0) = v_{t_0}(r, \varphi, z)$,

Dirichlet Randwert: $\forall (r, \varphi, z, t) \in \Gamma_D(t) \times (t_a, t_e) : v(r, \varphi, z, t) = v_D(r, \varphi, z, t)$,

Neumann Randwert: $\forall (r, \varphi, z, t) \in \Gamma_N(t) \times (t_a, t_e) : t^{(n)}(r, \varphi, z, t) = 0$,

wobei $\forall t \in (t_a, t_e) : \Gamma_D(t) \cup \Gamma_N(t) = \partial\Omega(t) \wedge \Gamma_D(t) \cap \Gamma_N(t) = \emptyset$

und $f \in C(Q_1, \mathbb{R}^3)$, $v_D \in C(\Gamma_D \times (t_a, t_e), \mathbb{R}^3)$.

Transformation auf Kugelkoordinaten:

Durch die Transformation von (x, y, z) auf $(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta)$ gehen die Gleichungen von kartesischen Koordinaten über auf Kugelkoordinaten.

$$\nabla p := \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)^T,$$

$$\operatorname{div} v := \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (v_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta},$$

$$\Delta v := \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right) - \frac{2}{r^2} \left(v_r + \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_\vartheta \cot \vartheta - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \cos \vartheta \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right) - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\vartheta + 2 \cos \vartheta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix},$$

$$(v \cdot \nabla) v := \begin{pmatrix} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{v_\varphi^2 + v_\vartheta^2}{r} \\ v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{v_r v_\vartheta + v_\varphi v_\vartheta \cot \vartheta}{r} \\ v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r \hat{v}_\vartheta - v_\varphi^2 \cot \vartheta}{r} \end{pmatrix}.$$

Anfangsrandwertaufgabe in Kugelkoordinaten:

Gesucht:

$v \in C^{2,1}(Q_1, \mathbb{R}^3) \cap C^{1,0}(Q_2, \mathbb{R}^3) \cap C(Q, \mathbb{R}^3)$ und $p \in C^{1,0}(Q_1, \mathbb{R}^3) \cap C(Q, \mathbb{R}^3)$,

so dass gilt:

$$\forall (r, \varphi, \vartheta, t) \in Q : \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v - \nu \Delta v + \frac{1}{\rho} \nabla p = f$$

$$\forall (r, \varphi, \vartheta, t) \in Q : \operatorname{div} v = 0$$

Anfangswert: $\forall (r, \varphi, \vartheta) \in \bar{\Omega}(t_0) : v(r, \varphi, \vartheta, t_0) = v_{t_0}(r, \varphi, \vartheta)$,

Dirichlet Randwert: $\forall (r, \varphi, \vartheta, t) \in \Gamma_D(t) \times (t_a, t_e) : v(r, \varphi, \vartheta, t) = v_D(r, \varphi, \vartheta, t)$,

Neumann Randwert: $\forall (r, \varphi, \vartheta, t) \in \Gamma_N(t) \times (t_a, t_e) : t^{(n)}(r, \varphi, \vartheta, t) = 0$,

wobei $\forall t \in (t_a, t_b) : \Gamma_D(t) \cup \Gamma_N(t) = \partial\Omega(t) \wedge \Gamma_D(t) \cap \Gamma_N(t) = \emptyset$

und $f \in C(Q_1, \mathbb{R}^3)$, $v_D \in C(\Gamma_D \times (t_a, t_b), \mathbb{R}^3)$.

Dimensionslose Gleichungen:

Der Einfachheit halber sei eine Referenzgeschwindigkeit V und eine Referenzlänge L für ein Problem gegeben. Seien x die Ortskoordinate, v die Geschwindigkeit, t die Zeit und ρ der Druck. Dann ist durch $x = Lx'$, $v = Vv'$, $t = \frac{\rho L^2}{\mu} t'$ und $p = \frac{\mu V}{L} p'$ eine Wahl dimensionslose Größen, x' , v' , t' und p' , gegeben, die im weiteren Verlauf zweckmäßig sein wird (Kapitel Benchmarks, Beispiel 9). Dies ist nur eine Möglichkeit dimensionslose Gleichungen aufzustellen. Durch die Vorgabe von x' und v' und anschließendes Einsetzen in die Navier-Stokes Gleichungen, erhält man Gleichungen in denen noch T , aus $t = Tt'$, und P , aus $p = Pp'$, festgelegt werden müssen. Im weiteren werden für die dimensionslosen Größen die Bezeichnungen x , v , t und p , verwendet. Dann lauten die dimensionslosen Navier-Stokes Gleichungen für die obige Wahl dimensionsloser Variablen ohne äußere Kräfte:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Re(v \cdot \nabla) v - \Delta v + \nabla p = 0, \quad (3.14)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (3.15)$$

wobei $Re = \frac{VL}{\nu}$. Details siehe [3; Seite 14,15,50]

Kapitel 4

Spezielle Beispiele mit analytischen Lösungen

Folgender Satz wird in diesem Kapitel hilfreich sein.

Satz 4.1:

Man erhält alle auf $(0, \infty)$ definierte Lösungen $y(x)$ der Eulerschen Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i y^{(i)}(x) = s(x),$$

mit gegebenen $s \in C(\Omega)$, $a_n \neq 0$ und $a_i \in \mathbb{R}$, für alle $i = 1, \dots, n$, indem man in den Lösungen $u(t)$ der linearen Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^n i! a_i \binom{D}{i} u(t) = s(e^t),$$

mit $D := \frac{d}{dt}$ und $\binom{D}{i} := \frac{(D-i+1)\dots(D-1)D}{i!}$, die Variable $t = \ln(x)$ setzt.

Beweis: siehe [2; Seite 241-242]

Alle Beispiele beschreiben stationäre Strömung, also Randwertaufgaben, daher wird im Folgenden die zeitliche Variable t weggelassen.

Beispiele in karthesischen Koordinaten:

Beispiel 1:

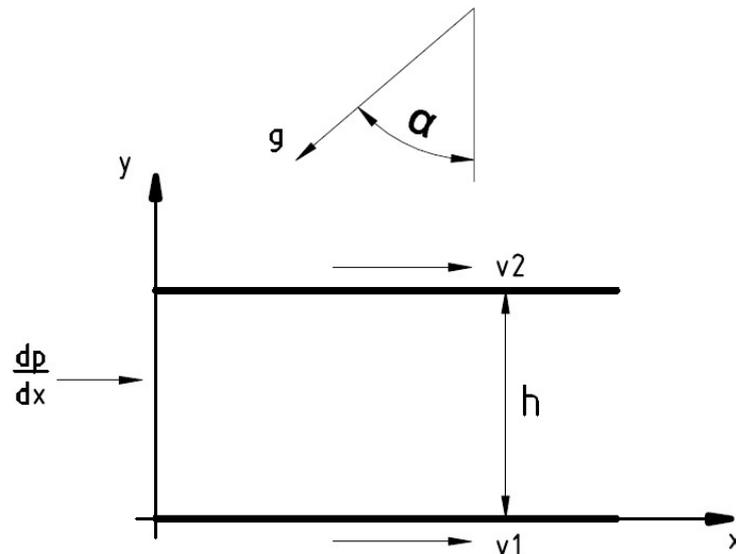


Abbildung 1: Illustration des 1. Beispiels in der Seitenansicht auf die x-y-Ebene.

Zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten mit konstantem Abstand h zueinander strömt ein Fluid unter einem **vorgegebenen, konstanten** Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$ und mit unter dem Winkel α wirkenden Gravitation.

Weiters dürfen sich die Platten entlang der Strömungsrichtung mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bewegen. Wenn man die Richtung des Druckgradienten und der Plattenbewegungen als x-Richtung identifiziert, wird das entstehende Geschwindigkeitsfeld ebenfalls in diese Richtung zeigen. Damit verschwinden die y- und z-Komponente des Geschwindigkeitsvektors. Die x-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes hängt nur von y ab.

Dies führt auf den folgenden Ansatz:

$$v = v(y) = \begin{pmatrix} v_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; p = p(x, y), \quad (4.1)$$

Mit den Randwerten: $v_x(0) = v_1$; $v_x(h) = v_2$.

Nach Einsetzen des Ansatzes in die Formulierung der Randwertaufgabe für karthesische Koordinaten bleiben zwei Gleichungen übrig:

$$-\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \cos \alpha, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \sin \alpha. \quad (4.3)$$

Aus der ersten Gleichung erhält man nach Trennung der Variablen und zweimaliger Integration:

$$v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \alpha \right) y^2 + C_1 y + C_2. \quad (4.4)$$

Einsetzen der Randwerte liefert die Lösung:

$$v_x(y) = \frac{(v_2 - v_1)y}{h} - \frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \alpha \right) \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) + v_1. \quad (4.5)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, wiederum mit Trennung der Variablen, die erste Teillösung für den Druck:

$$p(x, y) = -\rho g y \sin \alpha + C(x). \quad (4.6)$$

Da der Druckgradient in x-Richtung konstant und vorgegeben ist, gilt:

$$p(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x} x - \rho g y \sin \alpha + C. \quad (4.7)$$

Beispiel 2:

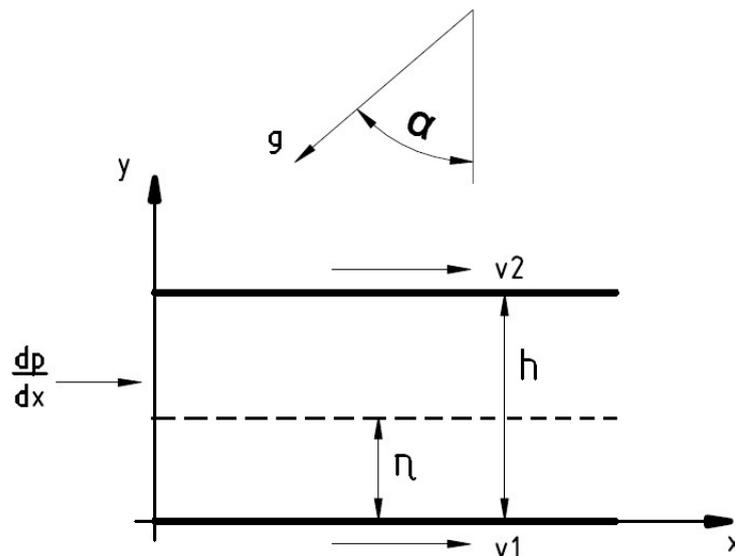


Abbildung 2: Illustration des 2. Beispiels in der Seitenansicht auf die x-y-Ebene.

Diese Beispiel ist ein Übungsbeispiel aus [4; Seite 308].

Wie in Beispiel 1 seien zwei Platten mit Abstand h zueinander gegeben. Wiederum sei ein **konstanter** Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$, ein Winkel α unter dem die Gravitation wirkt und Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Platten gegeben.

Weiters seien zwei nichtmischbare Fluide, mit den Dichten ρ_1, ρ_2 und den Viskositäten μ_1, μ_2 , gegeben, deren Phasengrenze die Linie $y = \eta$, $\eta \in (0, h)$ ist. Die unter Phase wird im folgenden als Ω_1 , die obere als Ω_2 bezeichnet.

Wobei gelten soll, dass $\rho_1 > \rho_2$ ist.

Damit erhält man den Ansatz:

$$\forall (x, y) \in \Omega_1 : v = v(y) = \begin{pmatrix} v_{x_1}(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; p = p_1(x, y), \quad (4.8)$$

$$\forall (x, y) \in \Omega_2 : v = v(y) = \begin{pmatrix} v_{x_2}(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; p = p_2(x, y), \quad (4.9)$$

mit den Randwerten $v_{x_1}(0) = v_1$; $v_{x_2}(h) = v_2$,

und den Interfacebedingungen: $\lim_{y \rightarrow \eta^-} v_{x_1}(y) = \lim_{y \rightarrow \eta^+} v_{x_2}(y)$, $\lim_{y \rightarrow \eta^-} \tau_{(xy)_1}(y) = \lim_{y \rightarrow \eta^+} \tau_{(xy)_2}(y)$.

Die zweite Interfacebedingung bedeutet, dass der Übergang der Scherspannungen der beiden Fluide normal zur Strömungsrichtung an der Phasengrenze stetig sein muss.

Durch analoge Berechnung der beiden Gleichungen wie in Beispiel 1 und Anpassung an die Randwerte und Interfacebedingungen, erhält man schließlich als Lösung:

$$v_{x_1}(y) = \frac{K}{2\mu_1} \left(y^2 + \frac{\mu_2\eta^2 - \mu_1(\eta^2 - h^2)}{\mu_1(\eta - h) - \mu_2\eta} y \right) - \frac{v\mu_2 y}{\mu_1(\eta - h) - \mu_2\eta} + v_1, \quad (4.10)$$

$$v_{x_2}(y) = \frac{K}{2\mu_2} \left(y^2 - h^2 + \frac{\mu_2\eta^2 - \mu_1(\eta^2 - h^2)}{\mu_1(\eta - h) - \mu_2\eta} (y - h) \right) - \frac{v\mu_2(y - h)}{\mu_1(\eta - h) - \mu_2\eta} + v_2 \quad (4.11)$$

wobei $K := \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \alpha$ und $v := v_2 - v_1$.

Für den Druck folgt mit der Interfacebedingung $p_1(x, \eta^-) = p_2(x, \eta^+)$:

$$p_1(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x} x - \rho_1 g y \sin \alpha + C, \quad (4.12)$$

$$p_2(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x} x - (\rho_1 \eta + \rho_2 (y - \eta)) g \sin \alpha + C. \quad (4.13)$$

Beispiele in Zylinderkoordinaten:

Beispiel 3:

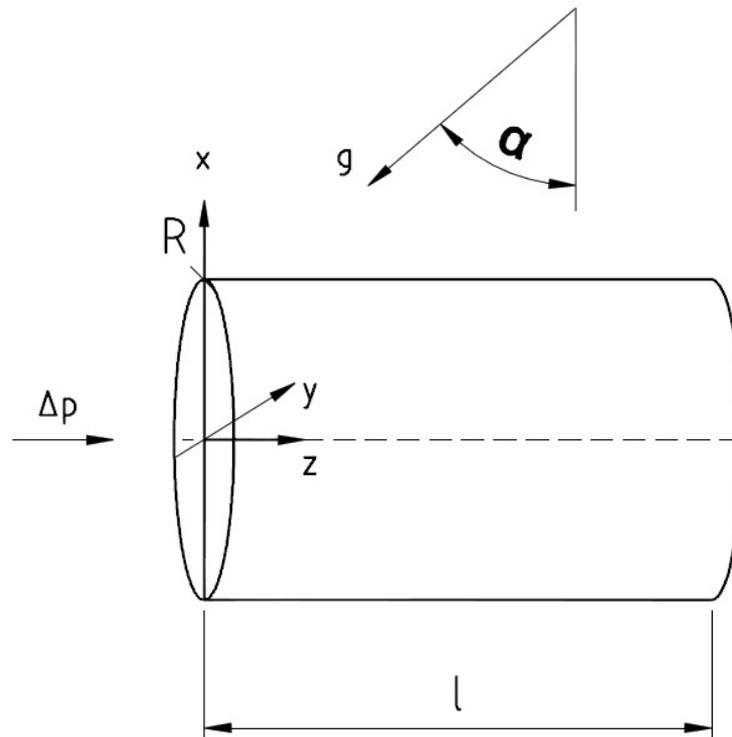


Abbildung 3: Illustration des 3. Beispiels.

Ein Fluid strömt durch ein gerades Rohr mit Radius R und der Länge l . Die Druckdifferenz zwischen den beiden Rohrenden ist vorgegeben und konstant. Weiters wirkt die Gravitation und zwar im Winkel α zur Rohrachse.

Die Rohrachse soll mit der z -Achse übereinstimmen.

Dann sieht man, dass die Richtung des Geschwindigkeitsfeld v mit der z -Achse übereinstimmt. Damit verschwinden die r - und φ -Komponenten des Feldes.

Aus der Radialsymmetrie des Rohres folgt die φ -Unabhängigkeit und aus der Konstanz des Durchmessers des Rohres die z -Unabhängigkeit der z -Komponente des Feldes.

Damit erhält man den Ansatz:

$$v = v(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z(r) \end{pmatrix}; p = p(r, \varphi, z), \quad (4.14)$$

mit dem Randwert: $v(R) = 0$.

Dieser Ansatz liefert, in die Formulierung der Anfangsrandwertaufgabe für Zylinderkoordinaten eingesetzt, folgende Gleichung:

$$-\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \cos \alpha. \quad (4.15)$$

Multiplikation mit ρ und ausdifferenzieren liefern:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \cos \alpha. \quad (4.16)$$

Ermittlung des Drucks p :

Dazu wird obige Gleichung nach p aufgelöst mit der Methode der Trennung der Variablen:

$$p(r, \varphi, z) = \left(\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \rho g \cos \alpha \right) z + C(r, \varphi). \quad (4.17)$$

Aus dem senkrecht auf die Rohrachse wirkenden Anteil der Gravitation lässt sich die Abhängigkeit des Drucks von r und φ bestimmen. Es erweist sich als vorteilhaft dies in kartesischen Koordinaten zu tun. Es gilt folgende Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \sin \alpha. \quad (4.18)$$

Wiederum mit der Methode der Trennung der Variablen erhält man als Lösung:

$$p(y, z) = -\rho g y \sin \alpha + C(z, \varphi). \quad (4.19)$$

Anschließende Transformation auf Zylinderkoordinaten liefert:

$$p(r, \varphi, z) = -\rho g r \sin \varphi \sin \alpha + C(z, \varphi). \quad (4.20)$$

Zusammengefasst gilt für den Druck:

$$p(r, \varphi, z) = \left(\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \rho g \cos \alpha \right) z - \rho g r \sin \varphi \sin \alpha + C. \quad (4.21)$$

Es gilt: $p(r, \varphi, l) - p(r, \varphi, 0) = -\Delta p = \left(\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \rho g \cos \alpha \right) l$,
 und damit, dass $-\frac{\Delta p}{\mu l} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha$.

Insgesamt gilt für den Druck p also:

$$p(r, \varphi, z) = -\frac{\Delta p}{l} z - \rho g r \sin \varphi \sin \alpha + C. \quad (4.22)$$

Ermittlung der Geschwindigkeit v_z :

Aus der Formel für den Druck p lässt sich die Ableitung $\frac{\partial p}{\partial z}$ ermitteln:

$$\frac{\partial p}{\partial z}(r, \varphi, z) = -\frac{\Delta p}{l}. \quad (4.23)$$

Einsetzen in die Gleichung (4.15) liefert:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\Delta p}{\mu l} + \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha. \quad (4.24)$$

Um die Gleichung (4.24) mit Satz 4.1 zu lösen, wird die Gleichung mit r^2 multipliziert:

$$r^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial v_z}{\partial r} = - \left(\frac{\Delta p}{\mu l} - \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha \right) r^2. \quad (4.25)$$

Anwendung des Satzes 4.1 liefert folgendes Ersatzproblem:

$$2! \begin{pmatrix} D \\ 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} D \\ 1 \end{pmatrix} u = D^2 u = \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left(\frac{\Delta p}{\mu l} - \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha \right) e^{2t}. \quad (4.26)$$

Die Lösung des Ersatzproblems mit der Methode der Trennung der Variablen lautet:

$$u(t) = - \left(\frac{\Delta p}{\mu l} - \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha \right) \frac{e^{2t}}{4} + C_1 t + C_2. \quad (4.27)$$

Die Substitution $t = \ln(r)$ liefert schließlich die Lösung des Ausgangsproblems:

$$v_z(r) = - \left(\frac{\Delta p}{\mu l} - \frac{\rho g}{\mu} \cos \alpha \right) \frac{r^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2. \quad (4.28)$$

Im Fall $r \rightarrow 0$ und $C_1 \neq 0$ gilt $C_1 \ln(r) \rightarrow -\infty$.

Da die Geschwindigkeit aber beschränkt sein muss, folgt daraus, dass $C_1 = 0$ sein muss. Mit $v_z(R) = 0$ gilt insgesamt:

$$v_z(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \cos \alpha \right) (R^2 - r^2). \quad (4.29)$$

Beispiel 4:

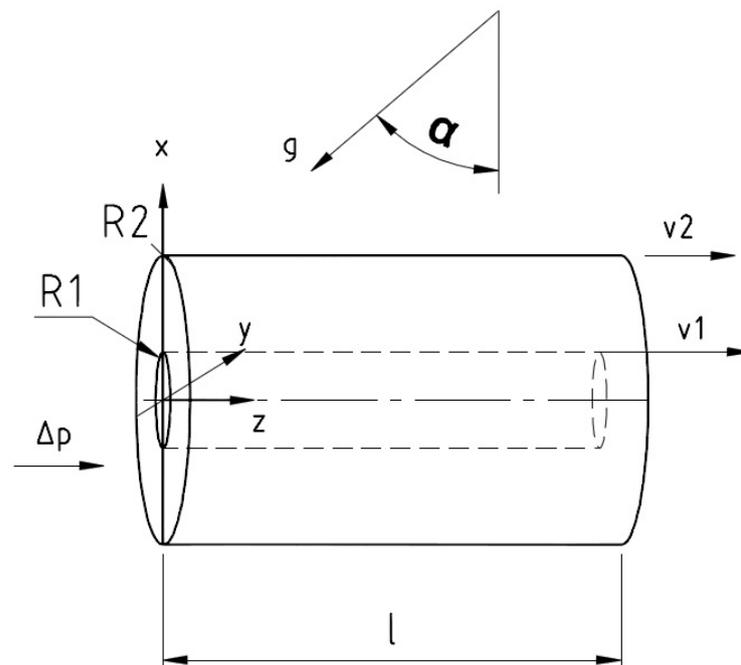


Abbildung 4: Illustration des 4. Beispiels.

Analog zu Beispiel 3 wird wieder eine Rohrströmung unter einer vorgegebenen, konstanten Druckdifferenz und unter der im Winkel α wirkenden Gravitation betrachtet. Im Unterschied zu Beispiel 3 wird jedoch die Strömung zwischen zwei konzentrischen Rohren mit Radien R_1 und R_2 untersucht. Weiters dürfen sich die Rohre entlang der Rohrachsen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, also $v_z(R_1) = v_1$ und $v_z(R_2) = v_2$.

Die meisten Schritte bei der Bestimmung der Lösung dieses Beispiels sind gleich wie in Beispiel 3, daher wird nur auf die Unterschiede eingegangen.

Wie in Beispiel 3 berechnet sich der Druck in Form von Gleichung (4.22):

$$p(r, \varphi, z) = -\frac{\Delta p}{l}z - \rho g \varphi \sin \alpha r \sin \varphi + C. \quad (4.30)$$

Bei der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes erhält man, wiederum wie in Beispiel 3, die Gleichung (4.16).

Mit den Randwerten $v_z(R_1) = v_1$ und $v_z(R_2) = v_2$ lässt sich die Lösung eindeutig festlegen als:

$$v_z(r) = \frac{K}{4\mu} (R_1^2 - r^2) + \frac{v_1 - v_2 + \frac{K}{4\mu} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R_1}{r} + v_1, \quad (4.31)$$

wobei $K := \frac{\Delta p}{l} - \rho g \cos \alpha$.

Beispiel 5:

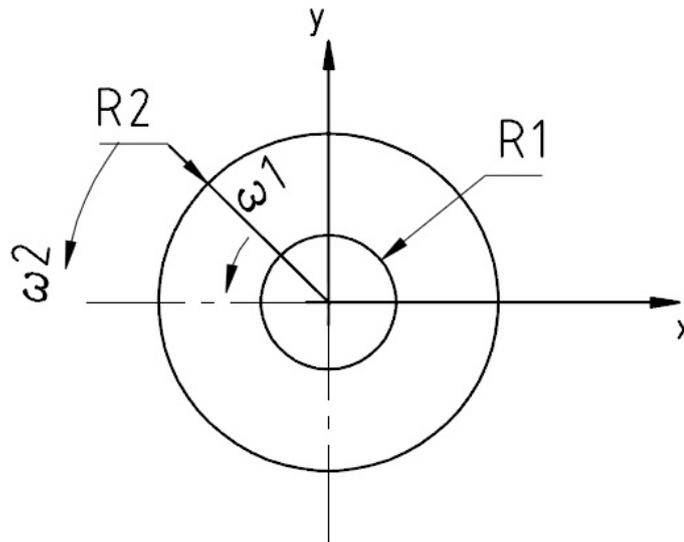


Abbildung 5: Illustration des 5. Beispiels in der Seitenansicht auf die x-y-Ebene.

Bei diesem Beispiel handelt es sich um eine Strömung zwischen zwei rotierenden, konzentrischen Zylindern mit Radius R_1 und R_2 ohne Einwirkung äußerer Kräfte. Da die entstehene Strömung radialsymmetrisch ist, wird die Formulierung der Randwertaufgabe für Zylinderkoordinaten verwendet. Das Geschwindigkeitsfeld wird durch vorgegebene, konstante Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der Zylinder erzeugt. Man sieht sofort, dass das Geschwindigkeitsfeld stationär ist, also nicht von der Zeit abhängt. Außerdem wird sich das Geschwindigkeitsfeld parallel zur r - φ -Ebene ausbilden, und zwar so, dass

die Geschwindigkeit entlang von Kreisen um den Ursprung der r - φ -Ebene konstant ist, was dazu führt, dass das Geschwindigkeitsfeld keine r - und z -Komponenten besitzt. Weiters ist die verbleibende φ -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes, aufgrund der konstanten Durchmesser der Zylinder, weder von z noch, aufgrund der Radialsymmetrie der Zylinder, von φ abhängig. Analog ist der Druck p nur von r abhängig.

Mit obigen Überlegungen erhalten wir den Ansatz:

$$v = v(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi(r) \\ 0 \end{pmatrix}; p = p(r). \quad (4.32)$$

Einsetzen des Ansatzes in die Formulierung der Randwertaufgabe für Zylinderkoordinaten liefert zwei verbleibende Gleichungen:

$$-\frac{\rho v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0, \quad (4.34)$$

Lösung von Gleichung (4.34):

Um die Gleichung (4.34) mit Satz 4.1 zu lösen, wird die Gleichung mit r^2 multipliziert:

$$r^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - v_\varphi = 0, \quad (4.35)$$

Anwendung des Satzes 4.1 liefert folgendes Ersatzproblem:

$$2! \left(\begin{matrix} D \\ 2 \end{matrix} \right) u + \left(\begin{matrix} D \\ 1 \end{matrix} \right) u - \left(\begin{matrix} D \\ 0 \end{matrix} \right) u = (D^2 - I) u = \frac{d^2 u}{dt^2} - u = 0, \quad (4.36)$$

Die Lösung des Ersatzproblems lautet:

$$u_H(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad (4.37)$$

Die Substitution $t = \ln(r)$ liefert schließlich die Lösung des Ausgangsproblems:

$$v_\varphi(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (4.38)$$

Lösung von Gleichung (4.33):

Einsetzen von Gleichung (4.38) in Gleichung (4.33) liefert:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \left(C_1^2 r + \frac{2C_1 C_2}{r} + \frac{C_2^2}{r^3} \right), \quad (4.39)$$

1.Fall:

Sei R_1 der Radius des inneren Zylinders und R_2 der des Äußeren. Sei weiters ω_1 die Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders und ω_2 die des Äußeren.

Also: $v_\varphi(R_1) = \omega_1$; $v_\varphi(R_2) = \omega_2$.

Damit lässt sich die Lösung des Geschwindigkeitsfeldes eindeutig bestimmen:

$$v_\varphi(r) = \frac{R_1 R_2 (\omega_2 R_1 - \omega_1 R_2) + r^2 (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2)}{r (R_1^2 - R_2^2)}, \quad (4.40)$$

wobei $C_1 = \frac{\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2}{R_1^2 - R_2^2}$ und $C_2 = \frac{\omega_2 R_1 - \omega_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2} R_1 R_2$.

Mit der Methode der Trennung der Variablen lässt sich eine Lösung für den Druck auffinden, die mit C_1 und C_2 folgendermaßen lautet:

$$p(r) = -\rho \left(\frac{C_1^2}{2} r^2 + 2C_1 C_2 \ln r - \frac{C_2^2}{2} \frac{1}{r^2} \right) + C. \quad (4.41)$$

Um die Formel übersichtlich zu halten wurde hier auf das Einsetzen der Integrationskonstanten C_1 und C_2 verzichtet.

Spezialfall: $R_1 = 0, \omega_1 = 0$.

Die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$v_\varphi(r) = \frac{\omega}{R} r \text{ und } p(r) = \frac{\rho \omega^2}{2R^2} r^2 + C. \quad (4.42)$$

2.Fall:

Der innere Zylinder mit Radius R_1 dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 . Der äußere Zylinder habe Radius $R_2 = \infty$ und Geschwindigkeit $\omega_2 = 0$.

Also: $v_\varphi(R_1) = \omega_1$; $\lim_{r \rightarrow \infty} v_\varphi(r) = \omega_2 = 0$.

Auflösen der Gleichung (4.38) mit diesen Randwerten liefert als Lösung:

$$v_\varphi(r) = \frac{\omega}{r} R, \quad (4.43)$$

$$p(r) = -\frac{\rho\omega^2}{2r^2}R^2 + C. \quad (4.44)$$

Beispiel 6:

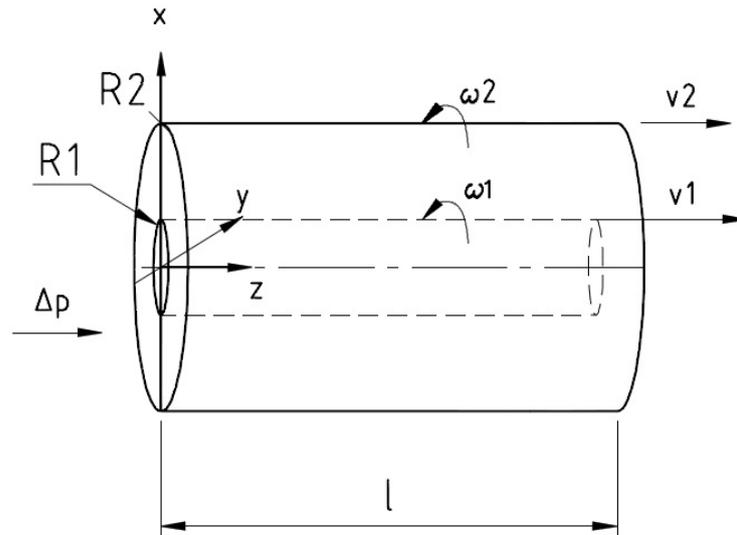


Abbildung 6: Illustration des 6. Beispiels.

Hierbei handelt es sich um eine Mischung aus Beispiel 4 und Beispiel 5. Es seien zwei rotierenden, konzentrischen Zylindern mit Radius R_1 und R_2 und Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 ohne Einwirkung äußerer Kräfte gegeben. Darüberhinaus dürfen sich die Rohre entlang der Rohrachse mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, also $v_z(R_1) = v_1$ und $v_z(R_2) = v_2$. Weiters sei ein konstanter Druckgradient entlang der z -Achse vorgegeben. Die rotierenden Zylinder erzeugen eine von r abhängige φ -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes, während der Druckgradient eine r abhängige z -Komponente erzeugt. Der Druck hingegen ist von φ und z abhängig.

Man erhält den Ansatz:

$$v = v(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi(r) \\ v_z(r) \end{pmatrix}; \quad p = p(r, z), \quad (4.45)$$

mit den Randbedingungen: $v_\varphi(R_1) = \omega_1$; $v_\varphi(R_2) = \omega_2$; $v_z(R_1) = v_1$; $v_z(R_2) = v_2$.

Daraus ergeben sich wie in Beispiel 4 und 5 durch einsetzen in die Navier Stokes Gleichungen die Gleichungen (4.22), (4.31), (4.40) und (4.41), die analog die Lösungen:

$$v_\varphi(r) = \frac{R_1 R_2 (\omega_2 R_1 - \omega_1 R_2) + r^2 (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2)}{r (R_1^2 - R_2^2)}, \quad (4.46)$$

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4l\mu} (R_1^2 - r^2) + \frac{v_1 - v_2 + \frac{\Delta p}{4l\mu} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R_1}{r} + v_1, \quad (4.47)$$

$$p(r, z) = -\frac{\Delta p}{l} z + C(r), \quad (4.48)$$

$$p(r, z) = -\rho \left(\frac{C_1^2}{2} r^2 + 2C_1 C_2 \ln r - \frac{C_2^2}{2} \frac{1}{r^2} \right) + C(z), \quad (4.49)$$

wobei C_1 und C_2 die gleichen Konstanten wie in Beispiel 5 sind.
Es gilt für den Druck:

$$p(r, z) = -\rho \left(\frac{C_1^2}{2} r^2 + 2C_1 C_2 \ln r - \frac{C_2^2}{2} \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\Delta p}{l} z + C. \quad (4.50)$$

Beispiele in Kugelkoordinaten:

Beispiel 7:

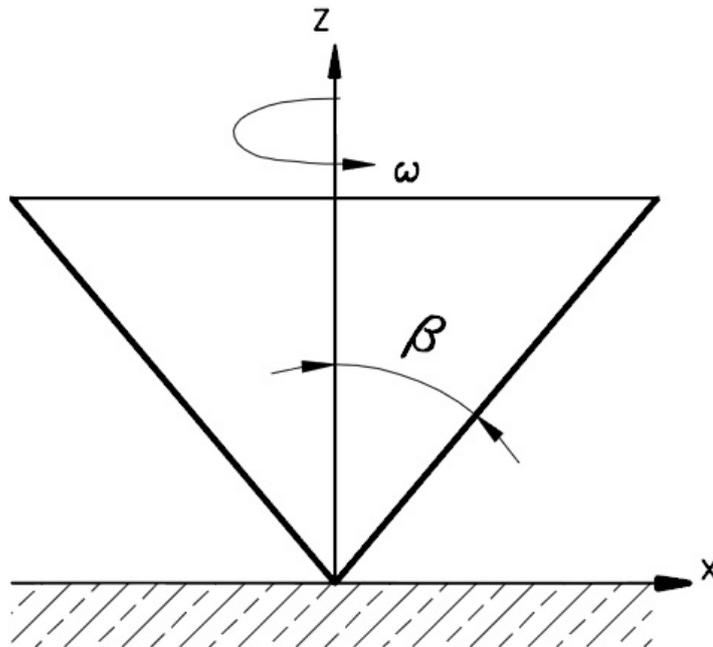


Abbildung 7: Illustration des 7. Beispiels in der Seitenansicht auf die x-z-Ebene.

Diese Beispiel stammt aus [4; Seite 296-299].

Es sei eine unendlich ausgedehnte Platte gegeben. Darauf befinde sich ein auf dem Kopf stehender Kegel, dessen Spitze die Platte berührt und dessen Rotationsachse orthogonal zur Platte ist.

Zur Beschreibung dieses Problems werden Kugelkoordinaten verwendet. Der Koordinatenursprung befinde sich in dem Punkt indem sich die Platte und die Spitze des Kegels berühren.

Die Platte liege in der r - φ -Ebene. Dann liegt der Mantel des Kegels in einer Parameterebene, $\{(r, \varphi, \vartheta) : \vartheta = \text{const.}\}$, des Koordinatensystems.

Die Platte dreht sich mit der Geschwindigkeit $r\omega$ und hat den Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Der Kegel steht still und sein Mantel sei die Parameterebene mit $\vartheta = \beta$.

Aus der Radialsymmetrie des Bespiels sieht man, dass die entstehende Strömung nur eine φ -Komponente besitzt, die jedoch sowohl von r als auch von ϑ abhängt.

Der Druck hängt auch von r und ϑ ab.

Der Ansatz lautet:

$$v = v(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\varphi(r, \vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad p = p(r, \vartheta), \quad (4.51)$$

mit den Randbedingungen: $v_\varphi(r, \frac{\pi}{2}) = r\omega$; $v_\varphi(r, \beta) = 0$.

Folgende Gleichungen bleiben nach Einsetzen des Ansatzes in Navier Stokes Gleichungen übrig:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \vartheta} \right) - \frac{v_\varphi}{\sin^2 \vartheta} = 0, \quad (4.52)$$

$$-\frac{\rho v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (4.53)$$

$$-\frac{\rho v_\varphi^2 \cos \vartheta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0. \quad (4.54)$$

Mit der Annahme, dass die Lösung proportional zu $r\omega$ ist, also dem Ansatz $v_\varphi = r\omega f(\vartheta)$, erhält man aus der 1.ten Gleichung:

$$0 = f''(\vartheta) + f'(\vartheta) \cot \vartheta + f(\vartheta) (1 - \cot^2 \vartheta) = \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (f'(\vartheta) \sin^2 \vartheta - f(\vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta) = \quad (4.56)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin^3 \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{f(\vartheta)}{\sin \vartheta} \right) \right). \quad (4.57)$$

Aus der Gleichung folgt nach einmaliger Trennung der Variablen:

$$\sin^3 \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{f(\vartheta)}{\sin \vartheta} \right) = C_1. \quad (4.58)$$

Erneute Trennung der Variablen liefert dann:

$$f(\vartheta) = C_1 \left(\ln \left(\tan \frac{\vartheta}{2} \right) \sin \vartheta - \cot \vartheta \right) + C_2. \quad (4.59)$$

Rückeinsetzen von $f(\vartheta)$ in den Ansatz und anpassen an die Randwerte gibt die Lösung:

$$v_\varphi(r, \vartheta) = r\omega \left[1 - \frac{\ln \left(\tan \frac{\vartheta}{2} \right) \sin \vartheta - \cot \vartheta}{\ln \left(\tan \frac{\beta}{2} \right) \sin \beta - \cot \beta} \right]. \quad (4.60)$$

Zur Berechnung des Drucks wir hier nur das Integral angegeben, da der berechnete Ausdruck sehr unhandlich ist.

$$p(r) = \rho \int \frac{v_\varphi^2}{r} dr. \quad (4.61)$$

Beispiel 8:

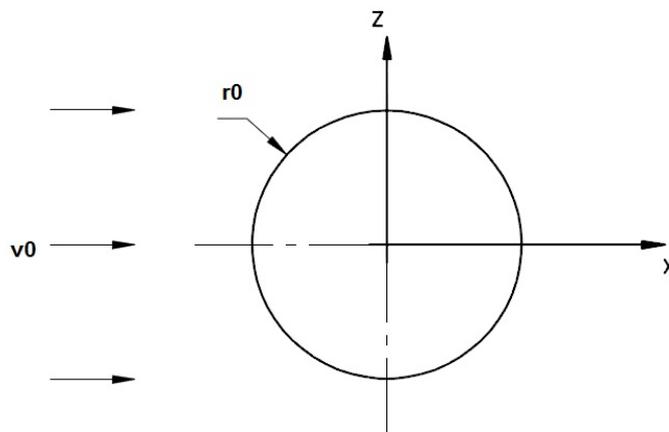


Abbildung 8: Illustration des 8. Beispiels in der Seitenansicht auf die x-z-Ebene

Dieses Beispiel stammt aus [3; Seite 52-54].

Es wird die Umströmung einer Kugel mit Radius r_0 in einem unendlich ausgedehnten, konstanten Geschwindigkeitsfeld mit Geschwindigkeit v_0 betrachtet.

Wenn man das Koordinatensystem so durch die Kugel legt, dass der Ursprung des Koordinatensystems mit dem Mittelpunkt der Kugel übereinstimmt und die r - φ -Ebene orthogonal zur Strömungsrichtung ist, dann sieht man, dass das Geschwindigkeitsfeld um die Kugel keine φ -Komponente besitzt.

Ebenso hängen die verbleibenden r - und ϑ -Komponente nicht von φ ab.

Man erhält den Ansatz:

$$v = v(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} v_r(r, \vartheta) \\ 0 \\ v_\vartheta(r, \vartheta) \end{pmatrix}; \quad p = p(r, \vartheta). \quad (4.62)$$

Unter Verwendung der **dimensionslosen** Navier-Stokes Gleichungen (3.14) und (3.15) sieht man, dass für eine sehr kleine Reynolds-Zahl, $Re \ll 1$, die Gleichungen sich folgendermaßen vereinfachen:

$$\Delta v = \nabla p, \quad (4.63)$$

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta \sin \vartheta) = 0. \quad (4.64)$$

Die Reynolds-Zahl in diesem Beispiel berechnet sich als $\frac{v_0 r_0}{\nu}$.

Mit dem Ansatz $v_r(r, \vartheta) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}(r, \vartheta)$ und $v_\vartheta(r, \vartheta) = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, \vartheta)$ ist die zweite Gleichung erfüllt. Darüberhinaus lässt sich $v(r, \vartheta)$ schreiben als:

$$v(r, \vartheta) = \operatorname{rot} \left(0, 0, \frac{\Psi}{r \sin \vartheta} \right). \quad (4.65)$$

Mit der Divergenzfreiheit der Strömung und der Identität $\Delta v = \operatorname{grad} \operatorname{div} v - \operatorname{rot}^2 v$, gilt:

$$\Delta v = -\operatorname{rot}^2 v = -\nabla p. \quad (4.66)$$

Anwendung des Rotors auf diese Gleichung liefert:

$$\operatorname{rot}^3 v = 0. \quad (4.67)$$

Einsetzen der Geschwindigkeit $v(r, \vartheta)$ in diese Gleichung ergibt:

$$\operatorname{rot}^4 v = \operatorname{rot}^4 \left(0, 0, \frac{\Psi}{r \sin \vartheta} \right). \quad (4.68)$$

Mit $D^2 := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ und $\operatorname{rot}^2 \left(0, 0, \frac{\Psi}{r \sin \vartheta} \right) = \left(0, 0, \frac{-D^2 \Psi}{r \sin \vartheta} \right)$ erhält man:

$$\operatorname{rot}^4 \left(0, 0, \frac{\Psi}{r \sin \vartheta} \right) = \left(0, 0, \frac{D^4 \Psi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) = 0. \quad (4.69)$$

Daraus folgt:

$$D^4 \Psi = 0. \quad (4.70)$$

Mit dem Ansatz $\Psi(r, \vartheta) = R(r) \Theta(\vartheta)$ sieht man, dass

$$D^2 \Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)^2 R \Theta = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) R \Theta \quad (4.71)$$

genau dann gilt, wenn $\Theta(\vartheta) = \sin^2 \vartheta$ ist.

Damit erhält man als Ansatz $\Psi(r, \vartheta) = R(r) \sin^2 \vartheta$ und insgesamt:

$$D^4 \Psi = \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 R(r) \sin^2 \vartheta = 0, \quad (4.72)$$

und weiter:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 R(r) = \left(\frac{d^4}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{d}{dr} - \frac{8}{r^4} \right) R(r) = 0. \quad (4.73)$$

Nach Multiplikation mit r^4 liefert diese Gleichung mit Satz 4.1 folgendes Ersatzproblem:

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} - 6 \frac{d^3}{dt^3} + 7 \frac{d^2}{dt^2} + 6 \frac{d}{dt} - 8 \right) u(t) = 0. \quad (4.74)$$

Dessen Lösung lautet:

$$u(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{2t} + C_4 e^{4t}. \quad (4.75)$$

Die Substitution $t = \ln(r)$ liefert als Lösung für $R(r)$:

$$R(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4. \quad (4.76)$$

Daraus folgt für $\Psi(r, \vartheta)$:

$$\Psi(r, \vartheta) = \left(\frac{C_1}{r} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4 \right) \sin^2 \vartheta. \quad (4.77)$$

Aus den Randbedingung, $\Psi(1) = \frac{\partial \Psi}{\partial r}(1) = 0$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r) = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \vartheta$ folgt schließlich:

$$\Psi(r, \vartheta) = \left(\frac{1}{4r} - \frac{3r}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \sin^2 \vartheta. \quad (4.78)$$

Eingesetzt in die Ansätze für $v_r(r, \vartheta)$ und $v_\vartheta(r, \vartheta)$ erhält man:

$$v_r(r, \vartheta) = \left(\frac{1}{2r^3} - \frac{3}{2r} + 1 \right) \cos \vartheta, \quad (4.79)$$

$$v_\vartheta(r, \vartheta) = \left(\frac{1}{4r^3} + \frac{3}{4r} - 1 \right) \sin \vartheta. \quad (4.80)$$

Einsetzen der Lösung für $v(r, \vartheta)$ in Gleichung (4.63) und Auflösen liefert:

$$p(r, \vartheta) = -\frac{3 \cos \vartheta}{2r^2} + C. \quad (4.81)$$

Kapitel 5

Folgerungen

Es ist durchaus möglich, Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen für spezielle Beispiele zu finden. Problematisch gestaltet sich jedoch die Einbeziehung realistischer Randbedingungen und äußerer Kräfte. Für einige der obigen Beispiele wurde angenommen, dass das betrachtete Gebiet in gewisse Richtungen unendlich ausgedehnt sei. Für andere Beispiele lassen sich Lösungen durch die Annahme einer nichtviskosen Strömung oder einer von Viskosität dominierenden Strömung auffinden. Weiters lassen sich Lösungen am ehesten für eindimensionale Strömungen finden, die nur von einer Variable abhängen, wie in Beispiel 1 bis 5. Die Mittel der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist hier ausreichend um Lösungen aufzufinden. In Beispiel 7 tritt ebenfalls eine eindimensionale Strömung auf, die jedoch von zwei Variablen abhängen. Hierbei handelt es sich also um das Problem eine partielle Differentialgleichung zu lösen. Mit Beispiel 6 wurde eine zweidimensionale Strömung angegeben, die nur von einer einzigen Variable abhängt und sich auf eindimensionale Strömungen zurückführen ließ. Und schließlich wurde mit Beispiel 8 eine viskose zweidimensionale Strömung angegeben, die von je zwei Variablen abhängt. Also ein System zweier linearer partieller Differentialgleichungen, deren Lösungen nur mit ausgeklügelten Mitteln aufgefunden wurde.

Man beachte jedoch, dass die Lösungen der Beispiele 3 bis 6 in Zylinderkoordinaten und der Beispiel 7 und 8 in Kugelkoordinaten gegeben sind. Die Transformation der Lösung von Beispiel 5 auf kartesischen Koordinaten ergibt dann eine zweidimensionale Strömung, die von zwei Variablen abhängt. Die Transformation der Lösungen der Beispiele 6 bis 8 liefern in kartesischen Koordinaten gar dreidimensionale Strömungen die teils von drei Variablen abhängen.

Das heißt also, dass vor allem die Ausnutzung von Symmetrien, durch geschickte Wahl des Koordinatensystem, es möglich macht, auch Spezialfälle dreidimensionaler Strömungen zu betrachten.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Feistauer. *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*.
Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [2] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*.
5. Auflage, B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [3] H. Ockendon, J.R. Ockendon. *Viscous Flow*.
1. Auflage, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [4] J.O. Wilkes. *Fluid Mechanics for Chemical Engineers*.
1. Auflage, Prentice Hall, University of Michigan, 1998.
<http://www.pearsonhighered.com/samplechapter/0137398972.pdf>

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Daniel Temesvari, erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Linz, November 2013

Daniel Temesvari

Curriculum Vitae

Name: Daniel Temesvari

Nationalität: Österreich

Geburtsdatum: 9 Februar, 1986

Geburtsort: Linz, Österreich

Ausbildung und Arbeit:

1992–1996	Volksschule Haid b. Ansfelden
1996–2000	Bundesrealgymnasium Traun
2000–2006	Höhere technische Lehranstalt für Chemieingenieurwesen Wels
2006–2006	Chemielaborant CEWE, Schlierbach
2007–2007	Zivildienst Samariterbund, Traun
2007–2010	Chemielaborant DSM, Linz
2010–2013	Studium der technischen Mathematik Johannes Kepler Universität, Linz