Modellbilden

Eine motivierende mathematische Tätigkeit

EINLEITUNG

- Derzeitige Unterrichtspraxis in Österreich:
  - Betonung des kalkülhaften Operierens
  - TIMSS und PISA: Aufdeckung von Defiziten

- Mögliche Schlussfolgerung (persönliche Einschätzung)
  Mathematik wird in der Schule verzerrt dargestellt

- Folgerungen:
  - Schüler(innen) sehen keinen Sinn in der Mathematik (wofür Mathematik?)
  - Mathematik wird kaum im Alltagsleben verwendet (Prozentrechnung als Schwierigkeit)
  - Mangel an Studierenden in Technik, Naturwissenschaften (und Mathematik)
  - in verschiedenen Bereichen benötigte Kompetenzen (Modellbildungskomp., Problemlösekomp.) sind nicht (ausreichend) verfügbar

- Nachhaltigkeit kann so nicht erreicht werden!

Einleitung

- Gesucht: Inhalte und Herangehensweisen, die charakteristisch für das Betreiben von Mathematik
- Wichtige Aspekte dabei:
  - Spiralprinzip: bestimmte Themen werden immer wieder auf ansteigendem Niveau behandelt
  - Genetische Methode: Anknüpfen an das Vorverständnis, Entdecken, Anwendung von Mathematik, kommunikativer Aspekte (vgl. Fischer), prototypische Aspekte, fächerübergreifendes Prinzip
  - Transfereffekt: Wissen wird anwendbar (soll anwendbar werden)
- Konsequenz:
  - Isolierung verschiedener mathematischer Gebiete wird überwunden,
  - Prozess der Modellbildung kann somit im Unterricht verstärkt Einzug/Einsatz finden

Mathematische Grundbildung

- Ziel des Mathematikunterrichts:
  - Mathematische Grundbildung zu vermitteln
  - Schüler sollen allg. Kompetenzen erwerben, die Mathematische Grundbildung (Mathematical Literacy) charakterisieren
- Definition (OECD):
  - „[…] Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundiert mathematische Urteile abgeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagierten und reflektierten Bürger entspricht."

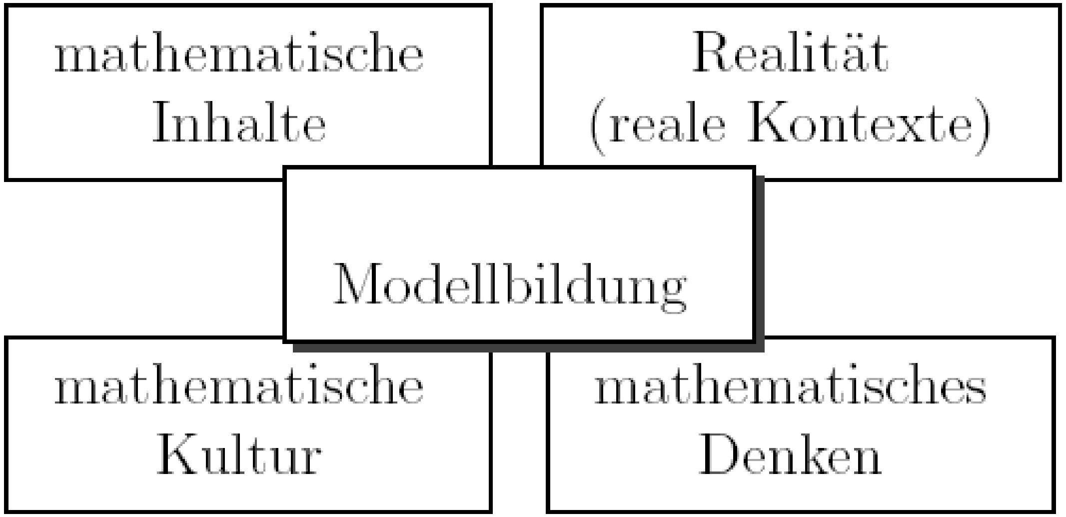
Modellieren – ein häufig gebrauchtes Wort

- Bildungsstandards
  - Alltagssprachliche Formulierungen in die Sprache/Darstellung der Mathematik übersetzen.
  - Problemrelevante mathematische Zusammenhänge identifizieren und mathematisch darstellen.
  - Komplexe Probleme modularisieren
- Eine Fundamentale Idee (nach Reichel/Humenberger, Siller) im Mathematikunterricht
  - 4 Grundpfeiler
  - Führt zum Modellbildungsprozess
- Verschiedene Zugänge im fächerübergreifenden Unterricht
  - Abhängig von den jeweiligen beteiligten Fächern

Der Begriff Modellbildung

Modellbildung hat die Funktion eines Verbindungsgliedes zwischen

- Mathematischem Inhalt
- Realen Kontexten
- Mathematischer Kultur
- Mathematischem Denken



Wozu Modellbilden?

Das tägliche Leben fordert, dass das erworbene Wissen bei unterschiedlichen Problemen und Situationen verwendet werden muss:

- Anwendung in der Praxis
- Vernetzung von Wissen
- Selbständiges Lernen

Wozu Modellbilden?

<u>Definition Modellbilden</u>

- Reale Situation mit Hilfe mathematischer Modelle beschreiben und damit zur Problemlösung zu gelangen (häufig im Schulgebrauch so zu finden)

- „Etwas Bekanntes benutzen um etwas Unbekanntes zu beschreiben“ (Wollring)

Beachtenswertes Merkmal der Modellbildung

- Beim Modellierungsprozess werden neben mathematischen Kenntnissen und Fertigkeiten auch interpretierende und wertende Fähigkeiten im Zusammenspiel von Mathematik und Wirklichkeit verlangt.
- Es geht also nicht ausschließlich um das Bearbeiten von innermathematischen Aufgaben, sondern um die Auseinandersetzung mit Problemen der Lebenswelt, die sich mit Hilfe von Mathematik behandeln lassen.

Ziele von Modellbildung:

- Erschließung der konkreten uns umgebenden Welt
- Erschließung der Mathematik
- Motivation zu „Neuem“

Modellbilden im Lehrplan

- Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen.
- Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.

Modellbilden im Lehrplan

- Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.

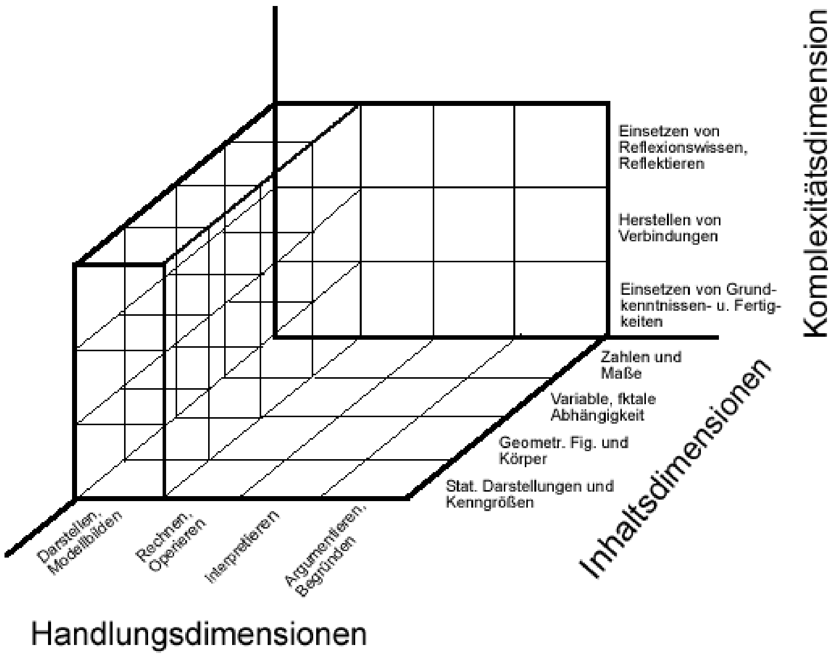
Modellbilden im Lehrplan

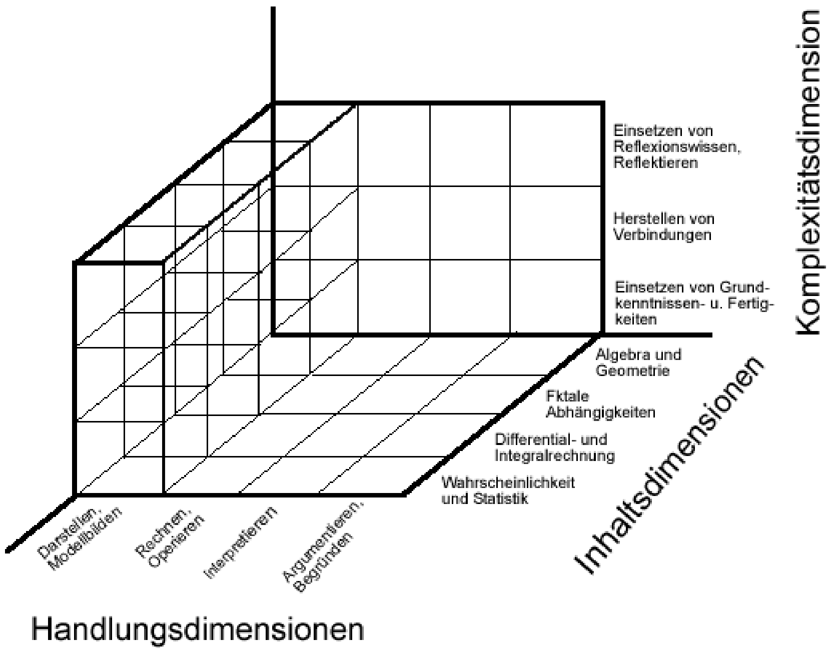
- Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifizieren. Die minimale Realisierung besteht in der Orientierung am Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und der Einführung von Begriffen über intuitive und heuristische Ansätze mit exemplarischen Exaktifizierungen, die maximale Realisierung in einer weit reichenden Präzisierung mathematischer Begriffe, Sätze und Methoden.

Verschiedene Sichtweisen

- Modellbilden als überprüfbare Komponente
  - Bildungsstandards
- Modellbilden als Prozess
  - Modell von Weigand/Weller
  - Modell von Tietze, Klika, Wolpers
  - Modell von Blum, Blum/Leiß
- Modellbilden und der Einsatz von Technologie
  - Modell von Siller, Greefrath
- Modellbildung als allgemeinbildende Tätigkeit
  - Kritischer Umgang mit alltäglichen Situationen

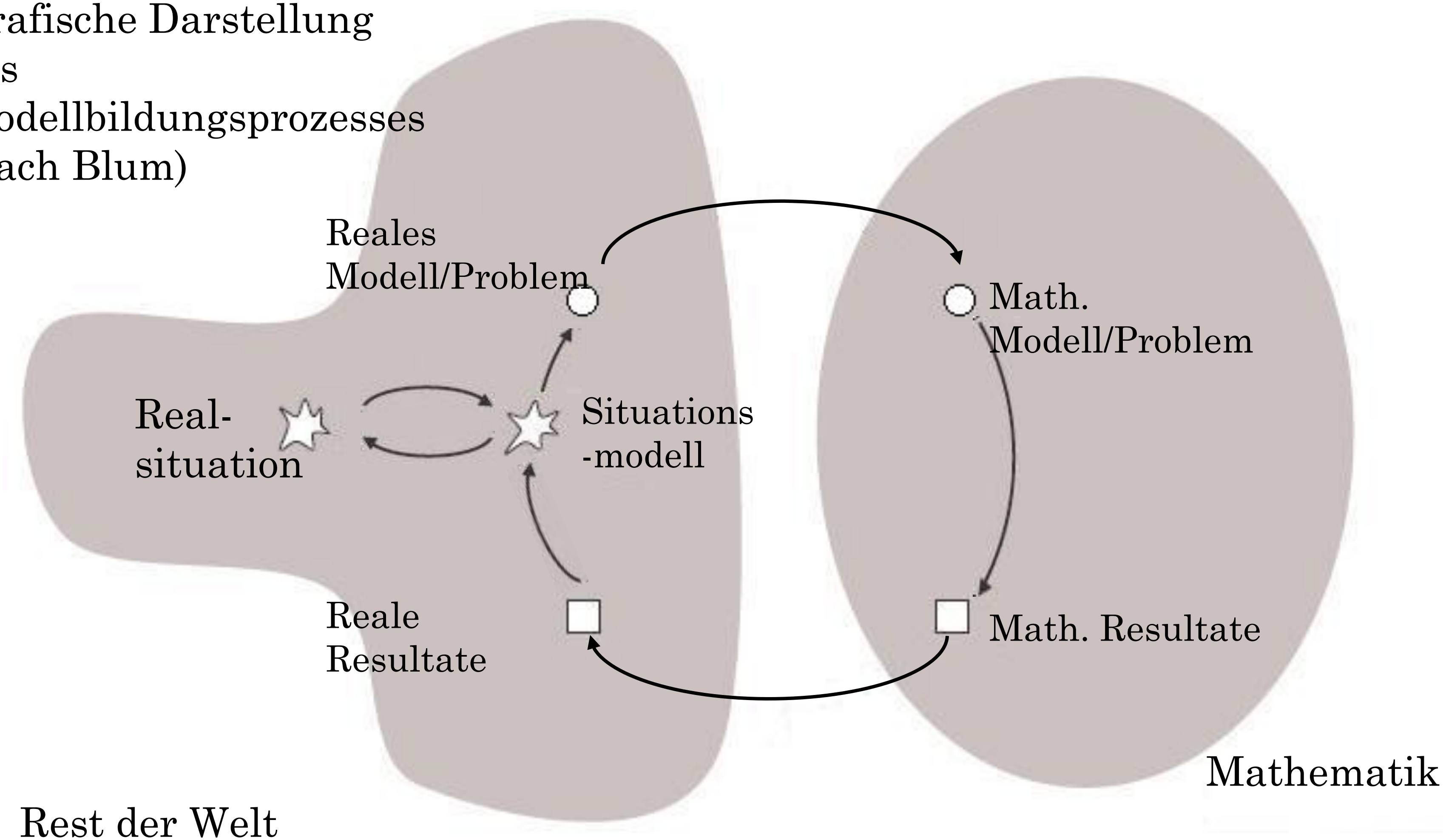
Modellbilden als überprüfbare Komponente





Modellbilden als Prozess

Grafische Darstellung des Modellbildungsprozesses (nach Blum)



Beispiel (DISUM-Projekt)

Aus einer Zeitungsmeldung:

Die Zuckerhutbahn benötigt für die Fahrt von der Talstation bis zum Gipfel des als Zuckerhut bekannten Berges rund 3 Minuten. Dabei fährt sie mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h und überwindet einen Höhenunterschied von ca. 180 m. Der Cheftechniker Giuseppe Pelligrini würde viel lieber zu Fuß gehen. So wie früher, als er Bergsteiger war und erst von der Talstation über die ausgedehnte Ebene zum Berg rannte und diesen dann in zwölf Minuten bestieg.

Wie weit ist die Strecke ungefähr, die Giuseppe von der Talstation bis zum Fuß des Berges rennen musste? Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Modellbilden als Prozess

Weigand, Weller:

- Spielen – Analysieren – Entdecken
- Simulieren – Abstrahieren
- Mathematisieren
- Experimentieren
- Interpretieren
- Erklären - Dokumentieren

Beispiel (Siller, Maaß)

- Sportwetten im Mathematikunterricht

Auf einem Tisch werden 2 Tore (durch Stifte, Bücher o.ä.) aufgestellt. Abwechselnd versuchen nun zwei Spieler(innen) als „Elfmeterschützen“ einen „Ball“ von ihrem Tor ins andere Tor zu befördern. Es gibt keinen Torwart! Gespielt wird nach den Regeln für ein Elfmeterschießen, d.h. ist die Anzahl der Treffer nach einem Spiel gleich, wird solange gespielt, bis eine Entscheidung fällt. Organisiert ein entsprechendes „Turnier“ mit mindestens zwei Wettbüros.

Ziel ist es eine Simulation zu (Sport-)Wetten zu erstellen, um zu erkennen, welche Auswirkungen Wetten für alle Beteiligten (Wettbüros, Wettende, ...) haben kann.

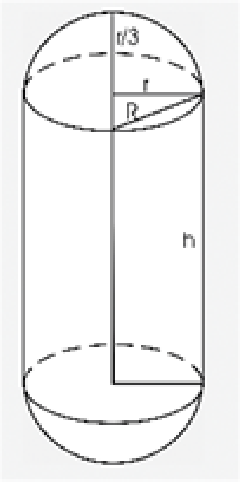
Modellbilden als Prozess

Tietze, Klika, Wolpers:

- Idealisieren – Schaffen von Realmodellen
- Mathematisieren des Realmodells
- Problemlösen
- Interpretation – Validieren des Modells
- Verbesserung bzw. Veränderung des Modells

Beispiel (Siller)

- Schwimmboje



Eine Schwimmboje hat die Gestalt eines Drehkörpers (Drehzylinder mir Radius r und Höhe h) mit an beiden Seiten aufgesetzten Kugelsegmenten (Radius der Kugel R). Die Höhe der Kugelsegmente beträgt ein Drittel des Zylinderradius. Wie sind die Abmessungen zu dimensionieren, wenn das Gesamtvolumen 500 dm^3 betragen soll und die Gesamtoberfläche möglichst klein werden soll?

(a) Finde die Hauptbedingung und die Nebenbedingungen. Definiere die Hauptbedingung in einer Variablen.

(b) Plotte die durch die Hauptbedingung und die Nebenbedingungen gegebene modifizierte Funktion in einer Variablen.

(c) Berechne r_{min}, R_{min}, H_{min} und die kleinste Oberfläche der Schwimmboje.

(d) Zeichne die Lösung.

Modellbilden als Prozess

Gemeinsamkeiten der verschiedenen Prozesse:

- Schüler(innen) sollen zu
  - selbstständigem
  - kritischem Denken
- beim Problemlösen erzogen werden!
- Näherung des Problems über
  - spielerische Ansätze
  - experimentelle Ansätze
- In allen drei Zugängen geht es um das Finden von geeigneten Ansätzen entsprechend dem Bildungsstand

Modellbilden als Prozess - Ausblick

Modellbilden im fächerübergreifenden Unterricht:

- Schüler/innen erfahren Analogien bei der Modellbildung unter verschiedenen fächerdifferenzierten Perspektiven.
- Wichtige Kompetenzen wie Beobachten, Beschreiben, Erläutern, Vergleichen oder Interpretieren werden geschult.
- Verbindung von Informationen aus verschiedenen Modellen und deren Interpretation für die reale Welt (vernetztes Denken). Dies ist auch bei F. Vester nachzulesen.
- Der/Die Schüler/in erfährt die Modellmethode als ein Mittel des fächerübergreifenden Lösens wissenschaftlicher Problemstellungen.

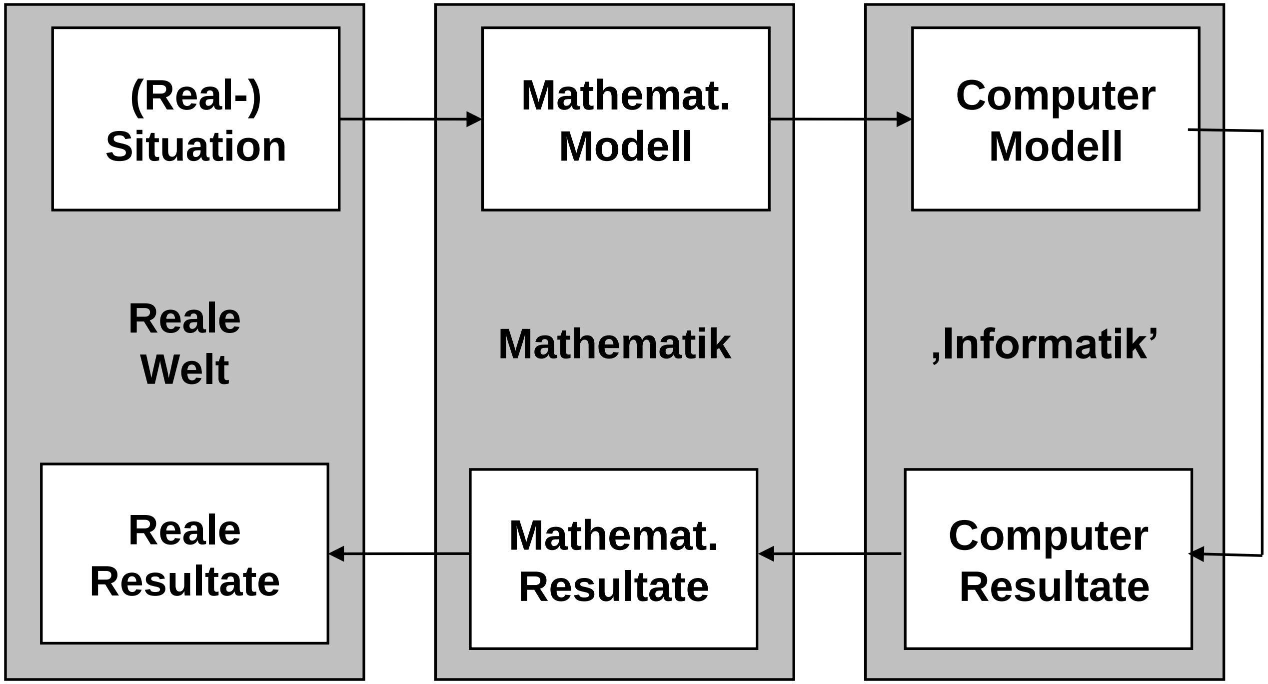
Modellbilden als Prozess - Ausblick

Modellbilden als Fundamentale (zentrale) (Leit-) Idee der Mathematik (Schweiger (Behelfsdefinition), Siller)

- lässt Probleme auf unterschiedlichen Niveaus zu,
- leitet in besonderer Weise zum Sprechen über Mathematik oder Informatik an,
- erlaubt es, dass Lehrplaninhalte an ihr aufgehängt werden,
- in der historischen Entwicklung aufzeigbar.

Modellbilden und der Einsatz von Technologie

- Mathematisches Modellieren mit Computer (Siller, Greefrath)



Modellbilden als allgemeinbildende Tätigkeit

- Die Aufgabe der Pflichtschule scheint relativ klar: Sie soll das nötige Rüstzeug liefern, das jede/r brauchen kann, im Beruf, im Privatleben, im öffentlichen Leben. Lesen, Schreiben, Rechnen gehören dazu, eine Fremdsprache, heute auch schon eine „informatische Grundbildung", sowie ein Grundwissen über die Natur, die Welt, unsere Geschichte etc.
- Kriterien dafür, was dazugehört, ergeben sich aus den Notwendigkeiten des Lebens, wie sie für die meisten Menschen angenommen werden können.
- Wie sieht es aber mit den weiterführenden Schulen aus? Wie gewinnt man hier Kriterien für die Aufnahme in das Curriculum?

Modellbilden als allgemeinbildende Tätigkeit

- Schüler(innen) lernen Zugänge zu Problemen der Umwelt, Lebenswelt kennen
- Schüler(innen) sind nicht die notwendigen Experten für Probleme in der Umwelt
- Schüler(innen) können über Möglichkeiten Probleme des Alltags zu beschreiben reflektieren
- Schüler(innen) erhalten einen „neuen“ Zugang zur Mathematik

Modellbilden als allgemeinbildende Tätigkeit

- Mathematik wird nicht nur auf irgendetwas außerhalb angewandt → Zusammenspiel Lebenswelt
- (komplexes) Beziehungsgeflecht zwischen Mathematik und Realität
- ‚Realitätsbezogene' Mathematik
- Offener Charakter der Aufgabenstellung

Modellbilden – mögliche motivierende Beispiele

Klassisches Schulbuchbeispiel

Aufgabenstellung:

Öl wird in zylinderförmigen Dosen abgefüllt.

a) Gib eine Funktionsgleichung (Formel) für die Oberfläche O(x) solcher Dosen in Abhängigkeit vom Radius x an, wenn das Volumen 1 Liter beträgt.

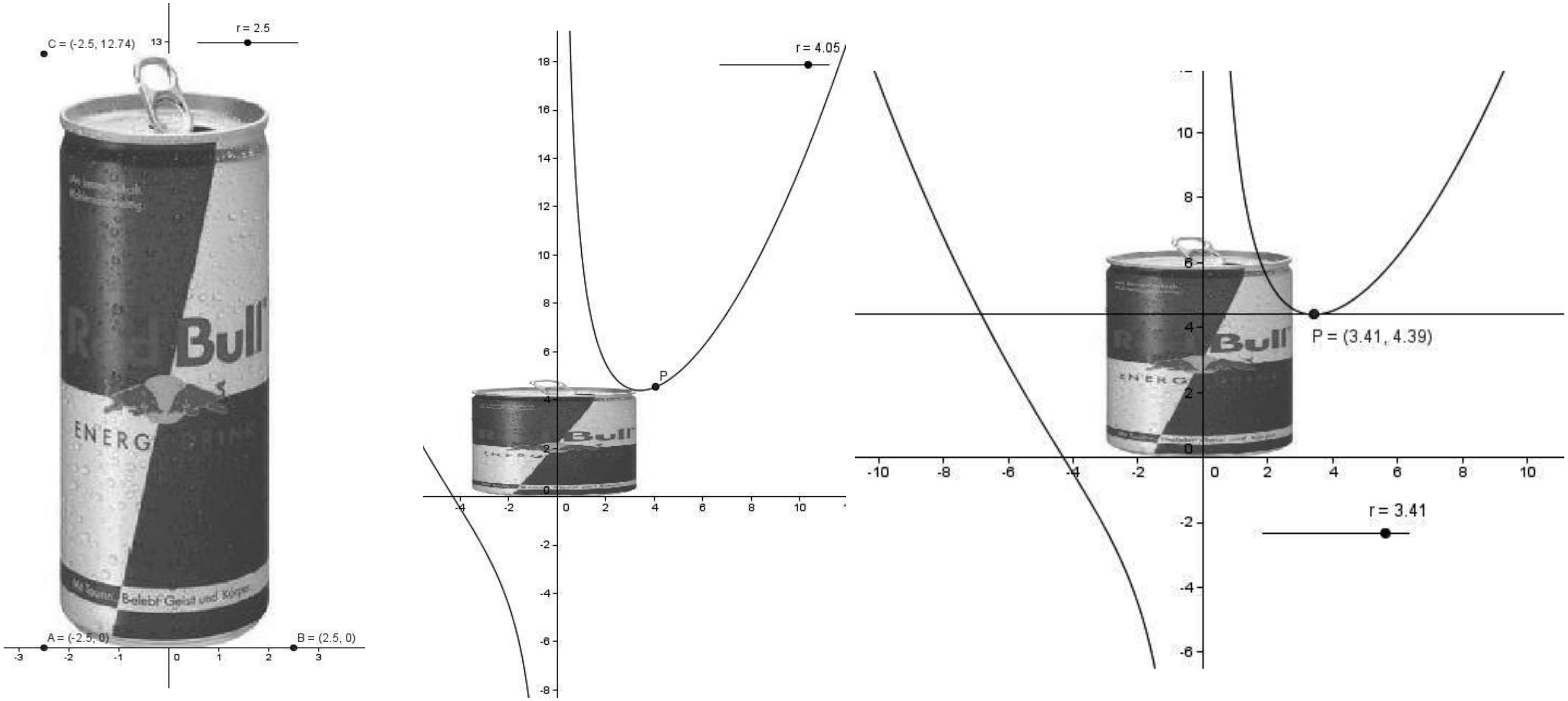
b) Zeichne den Graphen dieser Funktion O(x) in einem für die Problemstellung geeigneten Intervall mit Achsenbeschriftung und Einheiten. (bei Technologienutzung: Dokumentation)

c) Bestimme den Radius x, für den die Oberfläche O(x) möglichst klein ist.

Einfaches Modellbildungsbeispiel (vgl. Schwimmboje)

- Aufgabenstellung ein wenig abändern (Lebensweltbezug beachten!, z.B. V = 0,25 l)
- Erarbeitung der Aufgabe in GeoGebra mithilfe eines ‚dynamischen' Ansatz (vgl. Animation)
- Anschließende Diskussion über
  - Form der Dose
  - Tatsächlichen Materialverbrauch (Falz, Boden, …)
  - Nutzen der Mathematik

Einfaches Modellbildungsbeispiel (vgl. Schwimmboje)



- GeoGebra-Datei

Beispiele zu Modellbilden als prozessorientierter Vorgang

- Sportwetten
- Mathematik im Ei
- Mathematik im Weinglas

Sportwetten

- verfügbar unter/in:
  - ISTRON – Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht
  - MUED – Arbeitsblatt des Monats
  - Persönlich (Siller, Maaß)
- Erprobtes Material
  - Lehrerfortbildung (ISTRON-Tagung)
  - Modellierungstage Villach (Schülerlösungen Sek I+II)

Modellierungstage Villach (Betreuung: H.-St. Siller)

- Mögliche Lösungen
  - Unterstufe

  - Oberstufe

Schüler(innen)-Lösung Unterstufe (Quotenberechnung)

1. Ermittlung der „Favoriten“ – Vorrunde um eine Platzierung der Spieler zu ermitteln.
2. Annahme der Wahrscheinlichkeit für einen Sieg für jeden Spieler.

Spieler	Wettbüro 1	Wettbüro2
Jakob	50%	40%
Matthias F.	20%	25%
Luca	15%	15%
Matthias P.	10%	12%
Martin	5%	8%

3. 100/Wahrscheinlichkeit = Quote z.B. 100/50= 2.00
4. Quote mal 0,8: um immer einen Gewinn zu erhalten. z. B. : 2.00*0,8= 1,60

Schüler(innen)-Lösung Unterstufe (Quotenberechnung)

	Wettbüro1	Wettbüro2
Spieler	Quote	Quote
Jakob	1,60	2,25
Matthias F.	4,00	3,60
Luca	5,28	5,94
Matthias P.	8,00	7,47
Martin	16,00	11,25

5. Wetttipps gesammelt für ein Turnier.
6. Turnier:Der Sieger unseres Turniers war Jakob M.. Da nur 4 Personen auf ihn gesetzt hatten und er auch die niedrigste Quote hatte gewannen die Wettbüros sehr viel Geld.
7. Auswertung der Gewinne und Verluste: Bei uns verlor jede Person im Durchschnitt 13,70€

Schüler(innen)-Lösung Oberstufe - Variable Quote

- erst nach Ende dem Turniers endgültig errechnet, ändert sich während des Turnier ständig.
- Das Wettbüro ist Totalisateur, d.h. bloßer Vermittler der Wetten, geht selbst kein Risiko ein.
- Berechnung der variablen Quote:

Gesamtsumme (A+B) bzw. Gesamtsumme

(A+B) Gesamtbetrag (A)

Gesamtbetrag (B)

- ➢ fair für die Wettenden
- ➢ garantiert Gewinn für das Wettbüro

Schüler(innen)-Lösung Oberstufe - Feste Quote

- Wird schon vor Beginn des Wettereignisses vom Buchmacher (Wettbüro) festgelegt. Buchmacher orientiert sich an:
  - Tabelle
  - Vorherige Spiele
  - Gegner
- Schätzwert

Schätzwert

Berechnungsparameter:
Betriebsgeheimnis

- ➢ Risiko für das Wettbüro
- ➢ Gewinn berechenbar
- ➢ Surebets möglich
- ➢ Excel-Datei

Mathematik im Ei

- verfügbar unter/in:
  - ISTRON – Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht
  - Persönlich (Siller, Maaß)
- Erprobtes Material
  - Lehrerfortbildung (ISTRON-Tagung)
  - Vorstellung ausgewählter Teilgebiete
- Wunsch
  - Erprobung bei
    - Modellierungstage
    - Projekttagen
    - …

Politiker wollen das Überaschungsei verbieten

- Im August 2008 ging eine Meldung durch die Medien, nach der ein bei Kindern beliebtes Produkt verboten werden sollte, das Überraschungsei.
- Ein Vorschlag eines Ö3 Sprechers (am 7.8.2008 dazu) dazu: „Man soll das Ei so groß machen, dass kein Kind die darin enthaltene Überraschung schlucken kann – 30 cm Durchmesser!“
- Das gibt viel Schokolade! Warum?

Modellieren mit historischen Quellen

- *Nach C.H.L. Schmidt ergibt sich eine Eikurve als der geometrische Ort der Fußpunkte aller Lote auf Sekanten, gefällt von den Schnittpunkten der Abscisse mit Winkelhalbierenden, welche (stumpfe) Winkel zwischen den Sekanten und Parallelen zur X-Achse in den Schnittpunkten der Sekanten mit der Kreisperipherie halbieren. Ihre Formel ist*
  $r = 2a\cos^2\varphi$ *oder* $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^4$.

- *GeoGebra-Datei*

Mathematik im Weinglas

- verfügbar unter/in:
  - ISTRON – Materialien für einen realitätsbezogenen Unterricht (vgl. Vase (Körner))
  - ÖMG-Didaktik-Band 2009
  - Persönlich (Siller)
- Erprobtes Material
  - Lehrerfortbildung

Mathematik im Weinglas

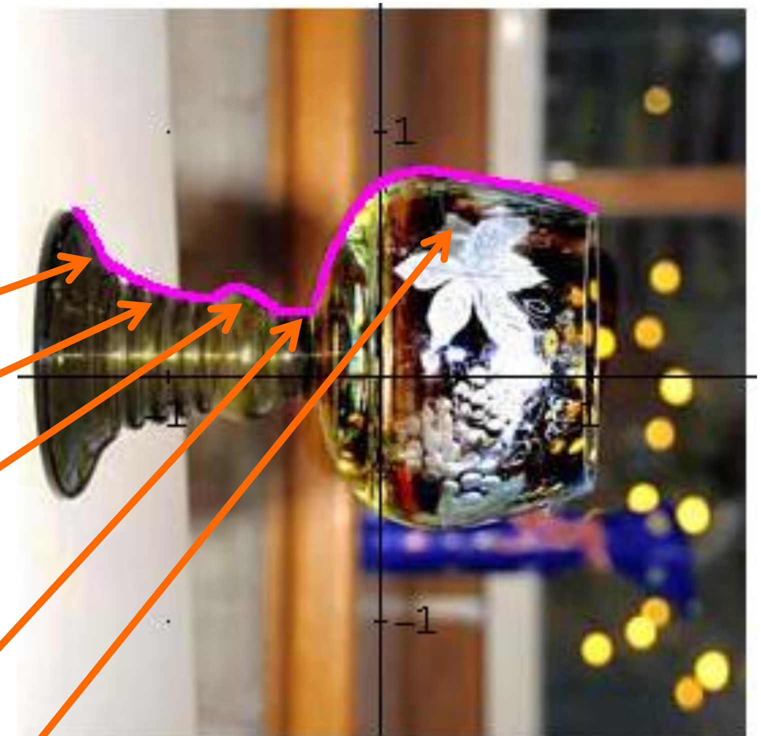
Aufgabenstellung:

„Modellieren sie das Weinglas im nebenstehenden Bild mit Hilfe von Funktionen!

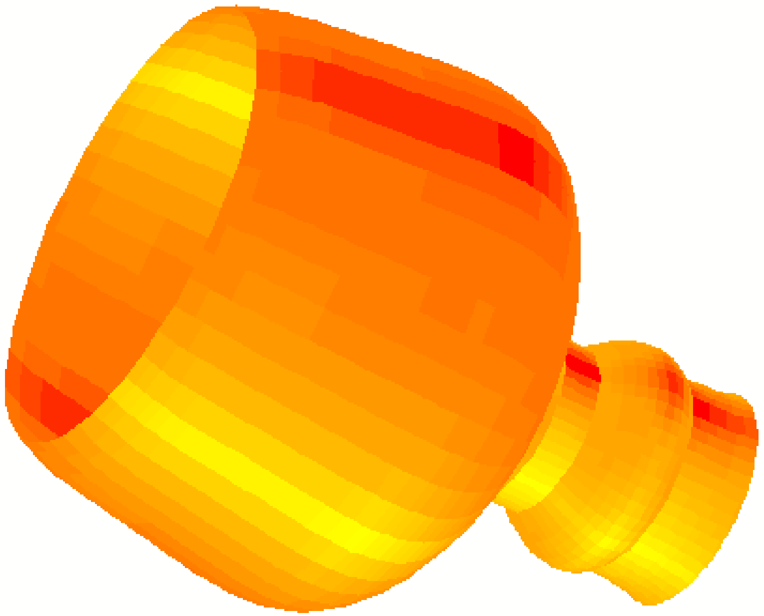
Welche Verbesserungen für dieses Modell könnte man durchführen?“

Mathematisierung

- Polynomfunktion 3. Grades: Glasfuss
- Polynomfunktion 2. Grades: Stiel
- Polynomfunktion 3. Grades: Knopf
- Lineare Funktion: Verbindungsstück mit Kelch
- Polynomfunktion 4. Grades: Glaskelch



Implementierung mit Hilfe von Derive



- *Modellierung mit Polynomfunktion*
- *Modellierung mit kubischen Splines*

Literatur

- Blum, W.; Leiß, D., 2005: Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe, in: Mathematik lehren, H. 128, S. 18-21
- Bruder, R.; Leuders, T.; Büchter, A.: Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten, Verlag Cornelsen Scriptor, Berlin, 2008
- Fuchs, K.J.; Blum, W.: Selbständiges Lernen im Mathematikunterricht mit ‚beziehungsreichen' Aufgaben, Hrsg. Thonhauser
- Reichel, H.C.: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. In: Wissenschaftliche Nachrichten, Nr. 99, 1995, S. 20–25
- Schmidt, C.H.L (1907): Über einige Kurven höherer Ordnung, Zeitschrift für mathem. u. naturwiss. Unterricht, 38. Jg., S. 485 ff
- Schweiger, F.: 1992: Fundamentale Ideen - Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: JMD, Jg. 13, H. 2/3, 199-214
- Siller, H.-St.; Fuchs, K.J.: Modellbilden bei Extremwertaufgaben. In: Praxis der Mathematik Heft 2, 2004, S. 49–54
- Siller, H.-St.: Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik, in: Fuchs, K. (Hrsg.): Schriften zur Didaktik der Mathematik und Informatik, Shaker Verlag, Aachen, 2008
- Siller, H.-St.; Fuchs, K.J.: Lebensnaher Unterricht mit Neuen Medien. In: 16. FNMA-Tagungsband, 2008, S. 20–24
- Siller, H.-St.; Greefrath, G.: Mathematical modelling in class regarding to technology. In: CERME – post-conference-proceedings, Lyon, 2009
- Siller, H.-St.: Zwei Fächer, eine Idee – Funktionales Modellieren in Mathematik und Informatik. In: Didaktikhefte der Österreichisch Mathematischen Gesellschaft, Heft 41, ÖMG, Wien, 2009
- Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H.: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Grundfragen der Analysis, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1997
- Weigand, H.-G.; Weller, H.: Das Lösen realitätsorientierter Aufgaben zu periodischen Vorgängen mit Computeralgebra. In: ZDM Heft 5, 1997, S. 162–169
- Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg Verlag, Braunschweig 1974

Herzlichen Dank für die Aufmerksamkeit

hans-stefan.siller@sbg.ac.at